Exercices - Récurrence / Induction

Florian Bourse

1 Chocolat

J'ai une tablette de chocolat qui contient n rangées de c carrés de chocolat. Je souhaite séparer tous les carrés de chocolats en coupant le moins possibles de morceaux en deux.

Question 1. Combien vais-je devoir couper de morceaux de chocolat ? Quelle est la stratégie optimale ?

2 Puissances de 13

Question 2. Vérifier que 13 peut s'écrire comme la somme de deux carrés de nombres strictement positifs.

Question 3. Montrer que toute puissance impaire de 13 peut s'écrire comme la somme de deux carrés de nombres strictement positifs.

Question 4. Vérifier que 13^2 peut s'écrire comme la somme de deux carrés de nombres strictement positifs.

Question 5. Montrer que toute puissance paire de 13 peut s'écrire comme la somme de deux carrés de nombres strictement positifs.

3 Polygones convexes

On découpe un polygone convexe en triangles.

Question 6. Combien de triangle obtient-on ? Est-il possible d'obtenir plusieurs résultats différents ?

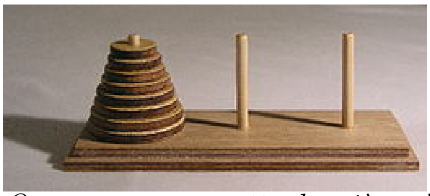
Question 7. En déduire la somme des angles intérieurs d'un polygone convexe.

4 Triomino

Question 8. Montrer que tout carré de côté une puissance de 2 auquel on a enlevé un carré unité peut être rempli par des triomino (forme composée de 3 carrés unité) en forme de L.

5 Tours de Hanoï

Les tours de Hanoï (originellement, la tour d'Hanoï) sont un jeu de réflexion imaginé par le mathématicien français Édouard Lucas, et consistant à déplacer des disques de diamètres différents d'une tour de « départ » à une tour d'« arrivée » en passant par une tour « intermédiaire », et ceci en un minimum de coups, tout en respectant les règles suivantes :



- *on ne peut déplacer plus d'un disque à la fois ;*
- *on ne peut placer un disque que sur un autre disque plus grand que lui ou sur un emplacement vide.*

On suppose que cette dernière règle est également respectée dans la configuration de départ.

Wikipédia (Tours de Hanoï)

On note x_n le nombre de déplacements nécessaires pour déplacer une tour de n disques.

Question 9. Trouver une relation de récurrence liant x_{n+1} à x_n.

Question 10. Calculer x_n.

6 Moyennes arithmétique et géométrique

La moyenne arithmétique de n nombres correspond à leur somme divisée par n.
La moyenne géométrique de n nombres correspond à la racine n-ième de leur produit.

On note $P(n)$ la propriété suivante :
La moyenne arithmétique de n nombres positifs est au moins égale à la moyenne géométrique de ces n même nombres.

Question 11. Montrer que pour tous nombres a et b positifs, on a :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

C'est-à-dire, $P(2)$ est vérifiée.

Question 12. Montrer que pour tout entier n, si $P(n+1)$ est vérifiée alors $P(n)$ est vérifiée.
Est-ce suffisant pour conclure par récurrence ?

Question 13. Montrer que pour tout entier n, si $P(n)$ est vérifiée alors $P(2n)$ est vérifiée.
Peut-on conclure ?

7 Nombres à effacer

Plusieurs nombres entiers positifs sont écrits au tableau. À chaque étape, un nombre n est effacé et est remplacé par un nombre quelconque d'entiers inférieurs à n. Si un 1 est effacé, aucun nombre n'est écrit.

Question 14. Est-il possible d'effacer complètement le tableau ? Est-il possible que le tableau ne soit jamais vide ?