

Graphes

Florian Bourse

- 0 Construire un graphe à $2n$ sommets dont tous les sommets sont de degré 3.
- 1 Montrer que dans tout graphe non-orienté $G = (S, A)$ avec au moins deux sommets, il existe deux sommets de même degré.
- 2 Soit $G = (S, A)$ un graphe non-orienté, avec $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$. On note M sa matrice d'adjacence :

$$(M_{i,j}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \{i, j\} \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que $M_{i,j}^k$ contient le nombre de chemins de longueur k de i à j dans G .

- 3 Un *triangle* dans G est un cycle de longueur 3. Donner un algorithme permettant de compter le nombre de triangles dans un graphe G .
- 4 Le complémentaire d'un graphe $G = (S, A)$ est le graphe $\bar{G} = (S, \mathcal{P}_2(S) \setminus A)$. Soit G un graphe possédant 6 sommets. Montrer que G ou \bar{G} possède un triangle.
- 5 Existe-t-il un graphe G de plus de 2 sommets tel que G et \bar{G} sont tous deux connexes ?
- 6 Existe-t-il un graphe G de plus de 2 sommets tel que ni G ni \bar{G} n'est connexe ?
- 7 Donner un algorithme de complexité $O(|S|)$ permettant à partir de la matrice d'adjacence d'un graphe orienté G de déterminer s'il existe un sommet u tel que $d_+(u) = 0$ et $d_-(u) = |S| - 1$.