# Exercices sur les graphes

Florian Bourse

**Question 1.** On considègre la variante suivante de l'algorithme de Kruskal sur un graphe $(S, A)$ :

$\mathcal{F} = \emptyset$
$\forall e \in A$ :
  $\mathcal{F} = \mathcal{F} \cup \{e\}$
  Si $\mathcal{F}$ contient un cycle, retirer une arête de poids maximal de ce cycle de $\mathcal{F}$.
Renvoyer $\mathcal{F}$.
Montrer que cet algorithme renvoie un arbre couvrant de poids minimum.

**Question 2.** Montrer que le nombre d'arbres sur un ensemble fixé de $n$ sommets est $n^{n-2}$.

Démontrer ou infirmer les assertions suivantes :

**Question 3.** Pour tout sous graphe $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$, on note $\ell(\mathcal{H})$ la suite des poids des arêtes de $\mathcal{H}$ triés dans l'ordre croissant.
Pour deux arbre couvrants de poids minimum $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$, on a $\ell(\mathcal{T}) = \ell(\mathcal{T}')$

**Question 4.** Dans un graphe non orienté, il y a toujours deux sommets de même degré.

**Question 5.** Si un graphe $(S, A)$ est connexe, alors son complémentaire $(S, S^2 \setminus A)$ est non connexe.

**Question 6.** Si un graphe $(S, A)$ est non connexe, alors son complémentaire $(S, S^2 \setminus A)$ est connexe.

**Question 7.** Un graphe $(S, A)$ est connexe si et seulement si pour tout $X \subset S$, il existe une arête ayant une extrémité dans $X$ et l'autre dans $S \setminus X$.

On désigne par $\omega(\mathcal{G})$ la *connectivité* d'un graphe non orienté $G$, c'est-à-dire le nombre de ses composantes connexes. En particulier, $G$ est connexe si et seulement si $\omega(\mathcal{G}) = 1$. Soit $\mathcal{G} = (S, A)$ un graphe non orienté et $I \subset S^2$.

**Question 8.** $\omega(\mathcal{G}) \geq \omega\left((S, A \cup I)\right) \geq \omega(\mathcal{G}) - |I|$.

**Question 9.** $\omega(\mathcal{G}) \leq \omega\left((S, A \setminus I)\right) \leq \omega(\mathcal{G}) + |I|$.

**Question 10.** Si $\omega\left((S, A \setminus I)\right) > \omega(\mathcal{G})$ pour tout $e \in I$, alors $\omega\left((S, A \setminus I)\right) = \omega(\mathcal{G}) + |I|$.

**Question 11.** $\omega(\mathcal{G}) \geq |S| - |A|$.

On appelle *point d'articulation* un sommet qui augmente le nombre de composantes connexes si il est retiré, et *pont* une arête qui augmente le nombre de composantes connexes si elle est retirée. Les composantes 2-connexes d'un graphe sont les sous-graphes maximaux qui ne contiennent pas de point d'articulation.

**Question 12.** Tout graphe connexe contient au moins deux sommets qui ne sont pas points d'articulation.

**Question 13.** Si un graphe est 2-régulier (tous ses sommets ont degré 2), alors c'est un cycle.

**Question 14.** Un graphe non orienté est un cycle si et seulement si il est non acyclique minimal.

Un cycle eulérien est un cycle qui contient toutes les arêtes d'un graphe.

**Question 15.** Montrer que si un graphe admet un cycle eulérien alors tous ses sommets sont de degré pair.

**Question 16.** Montrer que si tous les sommets d'un graphe sont de degré pair, alors il admet un cycle eulérien.