Exercices sur les graphes

Florian Bourse

Question 1. On considègre la variante suivante de l'algorithme de Kruskal sur un graphe (S, A) :

$\mathcal{F} = \emptyset$
$\forall e \in A$:
  $\mathcal{F} = \mathcal{F} \cup \{e\}$
  Si $\mathcal{F}$ contient un cycle, retirer une arête de poids maximal de ce cycle de $\mathcal{F}$.
Renvoyer $\mathcal{F}$.
Montrer que cet algorithme renvoie un arbre couvrant de poids minimum.

Question 2. Montrer que le nombre d'arbres sur un ensemble fixé de n sommets est n^{n-2}.

Question 3. Démontrer ou infirmer les assertions suivantes :

1. Dans un graphe non orienté pondéré par une fonction injective, tout arbre couvrant de poids minimum contient l'arête de poids minimum.
2. Dans un graphe non orienté pondéré par une fonction injective, aucun arbre couvrant de poids minimum ne contient l'arête de poids maximum.
3. Dans un graphe non orienté pondéré par une fonction injective, il n'existe qu'un seul arbre couvrant de poids minimum.
4. Pour tout sous graphe $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$, on note $\ell(\mathcal{H})$ la suite des poids des arêtes de $\mathcal{H}$ triés dans l'ordre croissant.
   Pour deux arbre couvrants de poids minimum $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$, on a $\ell(\mathcal{T}) = \ell(\mathcal{T}')$.
5. Dans un graphe non orienté, il y a toujours deux sommets de même degré.
6. Si un graphe (S, A) est connexe, alors son complémentaire $(S, S^2 \setminus A)$ est non connexe.
7. Si un graphe (S, A) est non connexe, alors son complémentaire $(S, S^2 \setminus A)$ est connexe.
8. Un graphe (S, A) est connexe si et seulement si pour tout $X \subset S$, il existe une arête ayant une extrémité dans X et l'autre dans $S \setminus X$.

On désigne par $\omega(\mathcal{G})$ la *connectivité* d'un graphe non orienté G, c'est-à-dire le nombre de ses composantes connexes. En particulier, G est connexe si et seulement si $\omega(\mathcal{G}) = 1$. Soit $\mathcal{G} = (S, A)$ un graphe non orienté et $I \subset S^2$.

Question 4. $\omega(\mathcal{G}) \geq \omega\left((S, A \cup I)\right) \geq \omega(\mathcal{G}) - |I|$.

Question 5. $\omega(\mathcal{G}) \leq \omega\left((S, A \setminus I)\right) \leq \omega(\mathcal{G}) + |I|$.

Question 6. Si $\omega\left((S, A \setminus \{e\})\right) > \omega(\mathcal{G})$ pour tout $e \in I$, alors $\omega\left((S, A \setminus I)\right) = \omega(\mathcal{G}) + |I|$.

Question 7. $\omega(\mathcal{G}) \geq |S| - |A|$.

On appelle *point d'articulation* un sommet qui augmente le nombre de composantes connexes si il est retiré, et *pont* une arête qui augmente le nombre de composantes connexes si elle est retirée. Les composantes 2-connexes d'un graphe sont les sous-graphes maximaux qui ne contiennent pas de point d'articulation.

Question 8. Tout graphe connexe contient au moins deux sommets qui ne sont pas points d'articulation.

Question 9. Si un graphe est 2-régulier (tous ses sommets ont degré 2), alors c'est un cycle.

Question 10. Un graphe non orienté est un cycle si et seulement si il est non acyclique minimal.

Un cycle eulérien est un cycle qui contient toutes les arêtes d'un graphe.

Question 11. Montrer que si un graphe admet un cycle eulérien alors tous ses sommets sont de degré pair.

Question 12. Montrer que si tous les sommets d'un graphe sont de degré pair, alors il admet un cycle eulérien.

Question 13. Dans un graphe orienté, un *trou noir* est un sommet de degré entrant $n - 1$ et de degré sortant 0. Il est possible de déterminer si un graphe possède un trou noir en temps $O(n)$ étant donné sa matrice d'adjacence.