

Programmation dynamique

Florian Bourse

Ce sujet présente 7 problèmes qui peuvent être traités indépendamment. Chacun de ces problèmes peut être résolu à l'aide d'une technique de programmation dynamique et possède donc au moins deux approches : algorithme récursif avec mémoïsation, ou approche du bas vers le haut.

1 Distance d'édition

Question 1. Étant donné deux chaînes de caractères $\mathbf{b} = b_1b_2 \dots b_n$ et $\mathbf{c} = c_1c_2 \dots c_m$, déterminer le nombre minimum d'insertions, suppressions et remplacements pour changer \mathbf{b} en \mathbf{c} .

2 Sous-mot commun maximal

Question 2. Étant donné deux chaînes de caractères $\mathbf{b} = b_1b_2 \dots b_n$ et $\mathbf{c} = c_1c_2 \dots c_m$, trouver un sous-mot commun $\mathbf{a} = a_1a_2 \dots a_k$ de longueur maximale, où les lettres a_1, a_2, \dots, a_k apparaissent dans \mathbf{b} dans cet ordre, et dans \mathbf{c} également.

3 Uno

On considère une simplification du Uno où chaque carte possède un chiffre et une couleur, sauf les jokers. Deux cartes sont dites compatibles si l'une des deux au moins est un joker, si elles ont la même couleur, ou si elles ont le même chiffre.

On pourrait représenter une carte en OCaml par le type suivant, le joker étant le 0 noir :

```
type couleur = Jaune | Bleu | Vert | Rouge | Noir;;  
type carte = couleur * int;;
```

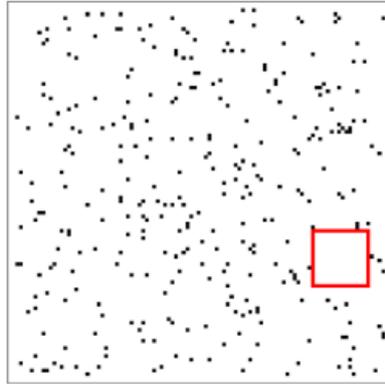
Question 3. Étant donné une liste de cartes $c_1; c_2; \dots; c_n$, on cherche à trouver la plus longue sous-séquence de cartes compatibles $c_{i_1}; c_{i_2}; \dots; c_{i_k}$ tels que $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ et c_{i_1} est compatible avec c_{i_2} qui est compatible avec c_{i_3} , etc.

Question 4.* Même question, mais les indices i_1, \dots, i_k ne sont plus nécessairement croissants.

4 Plus grand carré blanc

Question 5. Sur un écran de dimensions $n \times m$, où chaque pixel est noir ou blanc, déterminer le plus grand carré constitué uniquement de pixels blancs.

Illustration :



5 Ordonnement d'intervalles pondérés

Étant donné un ensemble d'intervalles $I_i = [a_i; b_i[$, dont chacun possède une valeur v_i . On veut choisir un sous-ensemble d'intervalles mutuellement compatibles de valeur maximum. Deux intervalles sont compatibles si leur intersection est vide.

Question 6. En commençant par trier les intervalles par date de fin croissante, donner un algorithme permettant de trouver un ordonnancement optimal d'intervalles pondérés.

6 Le compte est bon

Une instance du jeu "le compte est bon" est constitué d'une liste de nombres aléatoires (généralement des nombres à 1 chiffre, 10, 25, 50, 75 ou 100), ainsi que d'une cible (généralement un nombre à 3 chiffres). À chaque étape, on peut remplacer 2 nombres de la liste par leur somme, leur différence, leur produit ou leur quotient. Le but est d'arriver à avoir le nombre cible dans la liste, ou à défaut de s'en approcher le plus possible.

Question 7. Étant donné une instance du jeu, déterminer si il existe une solution.

Question 8. Étant donné une instance du jeu résoluble, donner une solution.

Question 9. Étant donné une instance du jeu qui peut ne pas être résoluble, donner le résultat le plus proche que l'on puisse obtenir, ainsi que la méthode pour y arriver.

7 Sous-suite croissante de longueur maximale

Question 10. Étant donné un tableau d'entiers \mathbf{t} , trouver la plus longue suite d'indices i_1, i_2, \dots, i_k tels que $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ et $t_{i_1} < t_{i_2} < \dots < t_{i_k}$.

Question 11.* Quel est le lien avec le problème du sous-mot commun maximal ?