Déduction naturelle

Florian Bourse

Nous rappelons les règles suivantes de la déduction naturelle pour les formules propositionnelles.

$$\begin{array}{c} \frac{}{\Gamma, p \vdash p} (Ax) \\ \\ \frac{\Gamma \vdash p \quad \Gamma \vdash q}{\Gamma \vdash p \wedge q} (\wedge_i) \quad \frac{\Gamma \vdash p \wedge q}{\Gamma \vdash p} (\wedge_e) \quad \frac{\Gamma \vdash p \wedge q}{\Gamma \vdash q} (\wedge_e) \\ \\ \frac{\Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash p \vee q} (\vee_i) \quad \frac{\Gamma \vdash q}{\Gamma \vdash p \vee q} (\vee_i) \quad \frac{\Gamma \vdash p \vee q \quad \Gamma, p \vdash \varphi \quad \Gamma, q \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi} (\vee_e) \\ \\ \frac{\Gamma, p \vdash q}{\Gamma \vdash p \rightarrow q} (\rightarrow_i) \quad \frac{\Gamma \vdash p \rightarrow q \quad \Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash q} (\rightarrow_e) \\ \\ \frac{\Gamma, p \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg p} (\neg_i) \quad \frac{\Gamma \vdash p \quad \Gamma \vdash \neg p}{\Gamma \vdash \perp} (\neg_e) \\ \\ \frac{\Gamma, p \vdash q \quad \Gamma, \neg p \vdash q}{\Gamma \vdash q} (t.e.) \quad \frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash p} (\perp_e) \end{array}$$

Question 1. Pour chacun des séquents suivants, prouver qu'ils sont déductibles ou prouver qu'ils ne le sont pas en exhibant un contre-modèle.

1. $p \vee (q \wedge r) \vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
2. $\neg p \vdash \neg(p \wedge q)$
3. $\neg p \vdash \neg(p \vee q)$
4. $\neg p, p \rightarrow q \vdash \neg q$
5. $\neg q, p \rightarrow q \vdash q \rightarrow p$

Question 2. Démontrer que $p \rightarrow q$ et $\neg p \vee q$ sont équivalents, c'est-à-dire que les deux séquents $p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q$ et $\neg p \vee q \vdash p \rightarrow q$ sont déductibles.

Question 3. Démontrer par induction le théorème d'affaiblissement de la déduction naturelle :

Si $\Delta \vdash A$ est dérivable dans le système de déduction naturelle pour la logique des proposition, alors pour toute formule B , $\Delta, B \vdash A$ l'est aussi.

Question 4. Démontrer par induction le théorème de contraction de la déduction naturelle :

Si $\Delta, B, B \vdash A$ est dérivable dans le système de déduction naturelle pour la logique des proposition, alors $\Delta, B \vdash A$ l'est aussi.

Nous rappelons aussi les règles d'introduction et d'élimination des quantificateurs logiques, ainsi que de l'égalité. Pour appliquer la règle $(\forall_i)$, x ne doit pas apparaître dans Γ en tant que variable libre. Pour appliquer la règle $(\exists_e)$, x ne doit pas apparaître dans Γ ni dans q en tant que variable libre.

$$\frac{\Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash \forall x.p} (\forall_i) \quad \frac{\Gamma \vdash \forall x.p}{\Gamma \vdash p^{\{x \leftarrow t\}}} (\forall_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash p^{\{x \leftarrow t\}}}{\Gamma \vdash \exists x.p} (\exists_i) \quad \frac{\Gamma \vdash \exists x.p \quad \Gamma, p \vdash q}{\Gamma \vdash q} (\exists_e)$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash x = x} (=i) \quad \frac{\Gamma \vdash t = u \quad \Gamma \vdash p^{\{x \leftarrow u\}}}{\Gamma \vdash p^{\{x \leftarrow t\}}} (=e)$$

Question 5. Montrer que le séquent suivant est déductible :

$$\vdash \forall x.\forall y.(\exists z.x = z \wedge y = z) \rightarrow x = y$$

Question 6. Pour chacun des séquents suivant, démontrer qu'il est valide ou proposer un contre-exemple :

1. $p(a), q(a) \vdash \exists x.(p(x) \wedge q(x))$
2. $\forall x.p(x) \vdash p(a) \wedge p(b)$
3. $\exists x.q(x) \vdash q(a) \vee q(b)$
4. $\neg p(c) \vdash \forall y.\neg p(y)$
5. $\forall x.p(x) \wedge \forall x.q(x) \vdash \forall x.(p(x) \wedge q(x))$
6. $p(b) \vdash \exists x.(p(x) \vee q(x))$
7. $p(b), \exists x.p(x) \rightarrow \exists x.q(x) \vdash q(b)$
8. $\vdash \neg \exists x.(p(x) \wedge \neg p(x))$
9. $\neq \exists x.(p(x) \wedge q(x)) \vdash p(a) \rightarrow q(a)$
10. $\exists y.(p(y) \vee \neg q(y)), q(a) \vee q(b) \vdash \exists y.\neg p(y)$
11. $\forall y.(p(y) \vee \neg q(y)), q(a) \vee q(b) \vdash \exists y.\neg p(y)$
12. $\exists x.(p(x) \vee q(x)), \forall x.\neg q(x) \vdash \exists x.p(x)$

On s'intéresse maintenant au typage du code OCaml suivant :

```
let f = fun x -> x 0 + 1;;
let g = fun x -> 1 + x;;
let h = fun x -> f g + g x;;
```

FIGURE 1 – Code sur lequel repose les questions 7, 8 et 9

Les règles de typage considérées sont les suivantes :

$$\frac{}{\Gamma \vdash 0 : \text{int}} (0_i) \quad \frac{}{\Gamma \vdash 1 : \text{int}} (1_i) \quad \frac{\Gamma \vdash x : \text{int} \quad \Gamma \vdash y : \text{int}}{\Gamma \vdash x + y : \text{int}} (+_i)$$

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash e : \tau}{\Gamma \vdash \text{fun } x \rightarrow e : \sigma \rightarrow \tau} (->_i) \quad \frac{\Gamma \vdash f : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash x : \sigma}{\Gamma \vdash f x : \tau} (->_e)$$

Question 7. Montrer que le séquent suivant est déductible (notations de la figure 1) :

$$\vdash f : (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int}$$

Question 8. Montrer que le séquent suivant est déductible (notations de la figure 1) :

$$\vdash g : \text{int} \rightarrow \text{int}$$

Question 9. Quel est le type de la fonction h ? Démontrer le en prouvant la déductibilité d'un séquent dont les hypothèse sont $\Gamma = \{f : (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int}, g : \text{int} \rightarrow \text{int}\}$