Devoir Surveillé 4

8 février 2025

INFORMATIQUE MP2I

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Ce sujet comporte huit pages numérotées de 1/16 à 16/16

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Tournez la page S.V.P.

Vue d'ensemble du sujet

Ce sujet est composé de 7 parties indépendantes, utilisant les langage de programmation C et OCaml.

Les différentes parties sont indépendantes et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Il n'est pas nécessaire d'avoir répondu aux questions d'une partie pour répondre aux questions d'une autre partie.

- La partie I s'intéresse à une fonction mystere en OCaml.
- La partie II s'intéresse au choix de structures de données pour modéliser des situations.
- La partie III s'intéresse à l'implémentation d'ensembles d'entiers par une liste triée simplement chaînée en C.
- La partie IV s'intéresse aux types structurés en OCaml, et aux relations d'ordres.
- La partie V s'intéresse à l'implémentation de files d'attentes à double extrémités par des listes doublement chaînées circulaires en C.
- La partie VI s'intéresse au tri par bulle sur des piles en OCaml.
- La partie VII s'intéresse au problème du bon parenthésage avec plusieurs types de parenthèses.

Pour répondre à une question, il est permis de réutiliser le résultat d'une question antérieure, même sans avoir réussi à établir ce résultat. En langage C, il est inutile de rappeler que les entêtes <assert.h>, <stdbool.h>, etc. doivent être inclus. En OCaml, les noms des arguments des fonctions sont donnés avec des indications de type. Il n'est pas nécessaire de recopier ces indications de type sur votre copie.

Quand l'énoncé demande de coder une fonction, sauf indication explicite de l'énoncé, il n'est pas nécessaire de justifier que celle-ci est correcte ou de tester que des préconditions sont satisfaites.

Le barème tient compte de la clarté des programmes : nous recommandons de choisir des noms de variables intelligibles ou encore de structurer de longs codes par des blocs ou par des fonctions auxiliaires dont on décrit le rôle.

Partie I. Une fonction mystère (OCaml) – 10 pts

La constante entière max_int désigne le plus grand entier représentable par OCaml. Nous donnons la fonction mystere suivante.

Fonction mystère

```
let rec mystere z = match z with
(* La fonction mystere calcule ... *)
| [] -> max_int
| [a] -> a
| a :: b :: y -> mystere ((if a <= b then a else b) :: y);;
```

☐ 1 – Donner la signature (c'est-à-dire le type) de la fonction mystere. Justifier brièvement.

Réponse 1. On sait que z est de type 'a list grâce au filtrage par motif dans lequel on reconnaît les constructeurs [] et :: propre à ce type.
On sait que mystere est de type 'a list -> int car dans le cas où la liste est vide, elle renvoie max_int qui est de type int.
On sait que mystere est de type int list -> int car elle peut renvoyer un élément de la liste z.

☐ 2 – Dire si, quelle que soit l'entrée z respectant le typage, le calcul de mystere z se termine et le démontrer. Préciser, le cas échéant, le nombre d'appels à la fonction mystere.

Réponse 2. mystere z termine pour toute liste d'entiers z. Montrons le par l'absurde :
Remarquons tout d'abord que la fonction mystere peut effectuer au plus un seul appel récursif, donc l'arbre des appels peut être représenté par une liste d'entrées $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Supposons la infinie. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_n| \geq 2$, sinon la fonction termine. Soit y telle que z_n est de la forme a :: b :: y. Alors $|z_n| = |y| + 2$ et $|z_{n+1}| = |y| + 1$. Donc $|z_n|$ est strictement décroissante à valeurs dans $\mathbb{N}$. Ce qui est absurde car $(\mathbb{N}, \leq)$ est bien fondé.
De plus, si on s'intéresse à $|z|$, on remarque qu'elle décroit de exactement 1 à chaque appel récursif si $|z| \geq 2$. Donc le nombre d'appels à la fonction mystere est $|z|$, ou 1 si z est vide.

☐ 3 – Compléter sommairement le commentaire de la ligne 2. Énoncer une propriété qui caractérise exactement la valeur de retour de la fonction mystere. Démontrer cette propriété.

Réponse 3.

```
(*La fonction mystere calcul le minimum d'une liste d'entiers (max_int par défaut)*)
```

C'est-à-dire que si on note m la valeur de retour de la fonction, pour tout élément e de la liste z on a $m \leq e$. De plus m est un élément de z.
On le montre par disjonction de cas :
Si $|z| < 2$, la propriété est vérifiée. Sinon, soit a, b, y tels que z est de la forme a :: b :: y. Soit c la valeur de **if** a <= b **then** a **else** b. Notons que $c \leq a$ et $c \leq b$, et qu'on a soit $c = a$, soit $c = b$, donc c est bien un élément de z. Soit m le minimum de la liste c :: y. Alors m est bien le minimum de z. En effet, pour tout élément e de y, $m \leq e$ et de plus $m \leq c$ donc $m \leq a$ et $m \leq b$.
Notons que cette réponse est beaucoup plus détaillée que nécessaire.

Dans la question suivante, le terme *complexité en espace* désigne un ordre de grandeur asymptotique de l'espace utilisé en mémoire lors de l'exécution d'un algorithme pour stocker tant l'entrée que des résultats intermédiaires et la valeur de retour.

☐ 4 – Quelle est la complexité en espace de l'appel mystere z ? Est-elle optimale ?

Réponse 4. La complexité temporelle de mystere étant $O(|z|)$ ($O(1)$ + les appels récursifs), sa complexité en espace ne peut pas la dépasser (en effet, pour écrire k éléments en mémoire, il faut un temps au moins k).
Comme le stockage de l'entrée nécessite $\Omega(|z|)$ espace, la complexité en espace de cette fonction est optimale.
Remarque : il est plus habituel de ne pas considérer le stockage de l'entrée lorsque l'on parle de complexité en espace. Cependant, on a besoin de savoir que OCaml repère et optimise les appels récursif terminaux et comprendre que le type list de OCaml permet le partage des maillons, étant un type persistant, pour déduire que la complexité en espace de cette fonction est $O(1)$ (sans compter l'entrée). Sans l'optimisation des appels récursifs terminaux, la complexité est $O(|z|)$ pour la restauration de contexte lors des appels récursifs. Cette notion est hors-programme pour les MP2I/MPI.

Partie II. Analogie avec le supermarché – 5 pts

Toutes les réponses de cette section seront à justifier brièvement.

☐ 5 – Quelle structure de donnée abstraite représente le mieux un chariot de supermarché ?

Réponse 5. Une pile car les éléments placés en premier dans le chariot ne peuvent pas être retirés si il reste des éléments placés au dessus.

☐ 6 – Quelle structure de donnée abstraite représente le mieux le tapis roulant de la caisse au supermarché ?

Réponse 6. Une file car les éléments placés en premier sur le tapis sont ceux que l'on récupère en premier.

☐ 7 – Que peut-on dire de l'ordre des éléments dans le chariot avant et après le passage en caisse ?

Réponse 7. L'ordre est inversé : les éléments du dessus avant la caisse sortent premier du tapis et se retrouvent en dessous après la caisse.

Partie III. Listes triées simplement chaînées (C) – 16 pts

Nous supposons définies deux constantes entières `INT_MIN` et `INT_MAX` qui désignent respectivement le plus petit entier et le plus grand entier représentables par le type `int` en machine. Elles sont représentées par $-\infty$ et $+\infty$ dans les schémas.
Indication C : Nous introduisons une structure de maillon constituée de deux champs par la déclaration suivante.

```
1.  struct maillon {
2.      int donnee;
3.      struct maillon *suivant;
4.  };
5.  typedef struct maillon maillon_t;
```

Définition : Dans l'ensemble de cette partie, nous réalisons le type abstrait EnsembleEntiers à l'aide d'une liste de maillons simplement chainés. Nous supposons que tous les entiers insérés, supprimés ou recherchés sont strictement compris entre `INT_MIN` et `INT_MAX`. Nous maintenons les trois invariants suivants :

- 1. Pour tous maillons m et m' consécutifs dans la liste chaînée, de champs `donnee` respectifs u et u', on a l'inégalité $u < u'$ (autrement dit, la liste est triée et ne contient pas de doublons).
- 2. La liste est encadrée par deux maillons sentinelles ayant `INT_MIN` comme champ `donnee` en tête de liste et `INT_MAX` en fin de liste.
- 3. Pour toute valeur entière u contenue dans l'ensemble, il existe un maillon accessible depuis le maillon sentinelle de tête ayant u comme champ `donnee`.

Par exemple, l'ensemble $\{2, -7, 9\}$ est représenté par la liste chaînée dessinée en figure 1 (où la croix représente le pointeur nul).

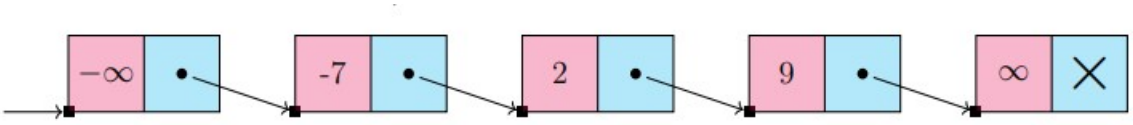


Figure 1 – Exemple d'ensemble d'entier représenté par une liste chaînée

☐ 8 – Écrire en C une fonction `maillon_t *init(void)` dont la spécification suit :
Effet : crée une copie de l'ensemble vide par l'instanciation de deux nouveaux maillons sentinelles chaînés entre eux.
Valeur de retour : pointeur vers le maillon de tête.

Réponse 8.

C

```c
maillon_t *init(void) {
  maillon_t *p2 = malloc(sizeof(maillon_t));
  p2->suivant = NULL;
  p2->donnee = INT_MAX;

  maillon_t *p1 = malloc(sizeof(maillon_t));
  p1->donnee = INT_MIN;
  p1->suivant = p2;

  return p1;
}
```

☐ 9 – Écrire en C une fonction `maillon_t *localise(maillon_t *t, int v)` dont la spécification suit :
Précondition : Le pointeur t désigne le maillon sentinelle de tête d'une liste chaînée.
Postcondition : En notant u le champ `donnee` du maillon désigné par la valeur de retour et u' celui du maillon successeur, on a les inégalités $u < v \leq u'$.

Réponse 9.

C

```c
maillon_t *localise(maillon_t *t, int v) {
  maillon_t *next;
  next = t->suivant;

  while (next->donnee < v) {
    t = next;
    next = t->suivant;
  }

  return t;
}
```

Nous souhaitons écrire une fonction `bool insere(maillon_t *t, int v)` ainsi spécifiée :
Précondition : Le pointeur t désigne le maillon sentinelle de tête d'une liste chaînée.
Postcondition : La liste désignée par le pointeur t contient la valeur entière v ainsi que les autres valeurs précédemment contenues.
Valeur de retour : Booléen `true` si la liste contient un élément de plus et `false` sinon.

☐ 10 – Présenter sous forme de croquis un jeu de données de test de la fonction `insere`, qui couvre notamment l'ensemble des valeurs de retour possibles. Dans chaque cas, on dessinera les états initial et final de la liste à la manière de la figure 1 et on donnera la valeur de retour.

Réponse 10.

```
f := {}
insere f 1 -> true
f == {1}
insere f 1 -> false
f == {1}
```

Nous proposons le code erroné suivant.

```
6.  bool insere_errone(maillon_t *t, int v) {
7.      maillon_t *p = localise(&t, v);
8.      maillon_t *n = malloc(sizeof(maillon_t));
9.      n->suivant = p->suivant;
10.     n->donnee = v;
11.     p->suivant = n;
12.     return true;
13. }
```

☐ 11 – Le compilateur produit le message d'erreur `incompatible pointer types passing 'maillon_t **' to parameter of type 'maillon_t *'`. Expliquer ce message et proposer une première correction.

Réponse 11. Ligne 7, `t` est de type `maillon_t *` (cf. ligne 6), donc `&t` est de type `maillon_t **`, mais localise attend en entrée un argument de type `maillon_t *`. Une correction est de supprimer le `&`.

C

```c
bool insere_errone(maillon_t *t, int v) {
  maillon_t *p = localise(t, v);
  maillon_t *n = malloc(sizeof(maillon_t));
  n->suivant = p->suivant;
  n->donnee = v;
  p->suivant = n;
  return true;
}
```

☐ 12 – Discerner le ou les tests de la question 10 manqués par la fonction `insere_errone`. Corriger en conséquence la fonction `insere_errone`.

Réponse 12. La fonction `insere_errone` ne renvoie jamais `false`, donc le test suivant est erroné :

```
f := {1}
insere f 1 -> false
f == {1}
```

C

```c
bool insere(maillon_t *t, int v) {
  maillon_t *p = localise(t, v);
  if (p->suivant->donnee == v) {
    return false;
  }
  maillon_t *n = malloc(sizeof(maillon_t));
  n->suivant = p->suivant;
  n->donnee = v;
  p->suivant = n;
  return true;
}
```

☐ 13 – Écrire en C une fonction `bool supprime(maillon_t *t, int v)` dont la spécification suit :
Précondition : Le pointeur t désigne le maillon sentinelle de tête d'une liste chaînée.
Postcondition : La liste désignée par le pointeur t ne contient pas la valeur entière v mais contient les autres valeurs précédemment contenues.
Valeur de retour : Booléen `true` si la liste contient un élément de moins et `false` sinon.

Réponse 13.

C

```c
bool supprime(maillon_t *t, int v) {
  maillon_t *p = localise(t, v);
  if (p->suivant->donnee != v) {
    return false;
  }
  maillon_t *tmp = p->suivant->suivant;
  free(p->suivant);
  p->suivant = tmp;
  /* Variante :
    tmp = p->suivant;
    p->suivant = p->suivant->suivant;
    free(tmp);
   */

  return true;
}
```

☐ 14 – Calculer la complexité en temps des fonctions `insere` et `supprime`.

Réponse 14. Dans le pire des cas, il faut parcourir entièrement la liste, donc la complexité est linéaire en la taille de la liste. $O(n)$ si la liste contient n éléments.

☐ 15 – Un programme C peut stocker ses données dans différentes régions de la mémoire. Citer ces régions. Dire dans laquelle ou dans lesquelles de ces régions la valeur entière 717 est inscrite lorsque nous exécutons le programme suivant.

```c
int v = 717;
int main(void) {
    maillon_t *t = init();
    insere(t, v);
    return 0;
}
```

Réponse 15. Les deux zones de mémoire sont la pile et le tas. La variable v est allouée sur la pile, donc le nombre 717 est stocké dans la pile, cependant, le maillon contenant la valeur 717 qui est inséré dans la liste est alloué sur le tas, donc ce nombre est présent dans les deux zones mémoires. On peut aussi noter qu'il est alloué une seconde fois sur la pile lors de l'appel) `insere` mais est libéré à la fin de son exécution.

Partie IV. Diverses représentations de nombres (OCaml) – 19 pts

On souhaite en OCaml regrouper dans un même type différentes manières de représenter des nombres, afin de faciliter leur utilisation :

- les nombres entiers, représentés par le type int ;
- les nombres rationnels (non nuls), représentés par deux entiers premiers entre eux ;
- les nombres réels, représentés par le type float .

On a ainsi les définitions de type suivantes :

```
type frac = {num : int; denom : int}
type num = Integer of int | Fraction of frac | Real of float
```

On note E l'ensemble des éléments de type num. On utilise pour comparer deux éléments de E l'ordre usuel $\leq$ sur les réels. Dans la suite, on omet la valeur particulière Real nan qui n'est comparable à aucun élément, afin de garantir la réflexivité de $\leq$.

☐ 16 – Montrer que $(E, \leq)$ n'est pas un ensemble ordonné.

Réponse 16. Integer 0 et Real 0. sont chacun plus petit que l'autre.

☐ 17 – On considère la relation $\equiv$ suivante :

$$\forall x, y \in E^2, x \equiv y \Leftrightarrow x \leq y \wedge y \leq x,$$

où $\Leftrightarrow$ désigne l'équivalence (si et seulement si), et $\wedge$ désigne la conjonction (et). Montrer que $\equiv$ est une relation d'équivalence.

Rappel : $\equiv$ est une relation d'équivalence si elle est :

réflexive : $\forall x, x \equiv x$;

symétrique : $\forall x, \forall y, x \equiv y \to y \equiv x$;

transitive : $\forall x, \forall y, \forall z, (x \equiv y \wedge y \equiv z) \to x \equiv z$.

Réponse 17. Réflexivité : $x \leq x$ donc $x \equiv x$ (réflexivité de $\leq$)
Symétrie : Si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $y \leq x$ et $x \leq y$
Transitivité : Si $x \leq y$ et $y \leq x$ et $y \leq z$ et $z \leq y$, alors $x \leq z$ et $z \leq x$ (transitivité de $\leq$)

On considère maintenant l'ensemble $\bar{E}$ des classes d'équivalences de $\equiv$. Deux éléments x et y sont dans la même classe d'équivalence si et seulement si $x \equiv y$.

☐ 18 – Soit $x, y \in E^2$ tels que $x \leq y$ et $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{E}^2$ leurs classes d'équivalences. Montrer

$$\forall x' \in \bar{x}. \forall y' \in \bar{y}. x' \leq y'$$

Réponse 18. $x' \leq x \leq y \leq y'$ par définition des classes d'équivalences puis transitivité de $\leq$.

On définit donc intuitivement la relation d'ordre $\leq$ sur $\bar{E}$ comme $\bar{x} \leq \bar{y}$ s'il existe $x \in \bar{x}$, $y \in \bar{y}$ tels que $x \leq y$.

☐ 19 – Montrer que $(\bar{E}, \leq)$ est un ensemble ordonné.

Réponse 19. Réflexivité : soit $x \in \bar{x}$, alors $x \leq x$, donc $\bar{x} \leq \bar{x}$
Transitivité : soit $\bar{x} \leq \bar{y}$ et $\bar{y} \leq \bar{z}$, alors $\exists, x \in \bar{x}, y_1, y_2 \in \bar{y}^2, z \in \bar{z}$ tels que $x \leq y_1$ et $y_2 \leq z$, or $y_1 \equiv y_2$ donc $y_1 \leq_2$ et par transitivité de $\leq$ on a $x \leq z$ donc $\bar{x} \leq \bar{z}$.
Antisymétrie : soit $\bar{x}$ et $\bar{y}$ tels que $\bar{x} \leq \bar{y}$ et $\bar{y} \leq \bar{x}$. Alors, il existe $x', x'' \in \bar{x}$ et $y', y'' \in \bar{y}$ tels que $x' \leq y'$ et $y'' \leq x''$. Or $x'' \leq x'$ donc $y'' \leq x'$ et $y' \leq y''$ donc $x' \leq y''$, donc $x' \equiv y''$ et $\bar{x} = \bar{y}$.

Cet ensemble est trivialement bien fondé car il ne possède qu'un nombre fini de valeur. Cependant, on peut s'intéresser à ce qu'il se passerait si notre type int n'était pas sujet au dépassement de capacité et pouvait représentrer tout élément de $\mathbb{N}$ (en pratique, ceci pourrait être implémenté par des listes d'entiers, ou encore des chaînes de caractères, ou des types plus élaborés, c'est le cas notamment dans le langage Python).

☐ 20 – Montrer que l'ensemble ordonné $(\mathbb{Q}^*, \leq)$ n'est pas bien fondé.

Réponse 20. $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ est une suite infinie strictement décroissante.

☐ 21 – On définit la relation $\leq_f$ suivante sur les fractions irréductibles :

$$\frac{n}{d} \leq_f \frac{n'}{d'} \text{ si } (n,d) = (n',d') \text{ ou } n+d < n'+d'$$

$(\mathbb{Q}^{+*}, \leq_f)$ est-il un ensemble ordonné ? bien fondé ? $\leq_f$ est-elle totale ?

Réponse 21. Réflexivité : $(n,d) = (n,d)$ donc $\frac{n}{d} \leq_f \frac{n}{d}$
Transitivité : Soit $(n_1,d_1),(n_2,d_2),n_3,d_3)$ tels que $\frac{n_1}{d_1} \leq_f \frac{n_2}{d_2}$ et $\frac{n_2}{d_2} \leq_{\frac{n_3}{d3}}$. Si $(n_1,d_1) = (n_2,d_2)$ ou $(n_2,d_2) = (n_3,d_3)$, alors $(n_1,d_1) \leq_f (n_3,d_3)$ par hypothèse.
Sinon, $n_1+d_1 < n_2+d_2$ et $n_2+d_2 < n3+d_3$ donc $n_1+d_1 < n_3+d_3$.
Donc $(\mathbb{Q}^*, \leq_f)$ est un ensemble ordonné.
$\leq_f$ n'est pas total car $\frac{3}{2}$ et $\frac{2}{3}$ ne sont pas comparables.
Notons que $(\mathbb{Q}^{*+}, \leq_f)$ est bien fondé. En effet $\frac{n}{d} <_f \frac{n'}{d'}$ si et seulement si $n+d < n'+d'$. Donc une suite infinie strictement décroissante dans $(\mathbb{Q}^{*+}, \leq_f)$ donne une telle suite dans $(\mathbb{N}, \leq)$..

☐ 22 – Écrire une fonction float_of_num : num -> float qui converti un nombre de type num en type float. *On pourra utiliser la fonction float_of_int : int -> float.*

Réponse 22.

```
let float_of_num x = match x with
  | Integer n -> float_of_int n
  | Fraction f -> float_of_int f.num /. float_of_int f.denom
  | Real x -> x
```

☐ 23 – Écrire une fonction add : num -> num -> num qui calcule l'addition de deux nombres en suivant la convention suivante :

- si un des deux nombres est un réel, le résultat est un réel ;
- sinon, si un des deux nombres est une fraction, le résultat est une fraction ;
- sinon, le résultat est un entier.

On pourra supposer l'existence d'une fonction add_frac : frac -> frac -> frac qui effectue l'addition de deux fractions irréductibles et renvoie la somme sous la forme d'une fraction irréductible. Bonus : la coder.

Réponse 23.

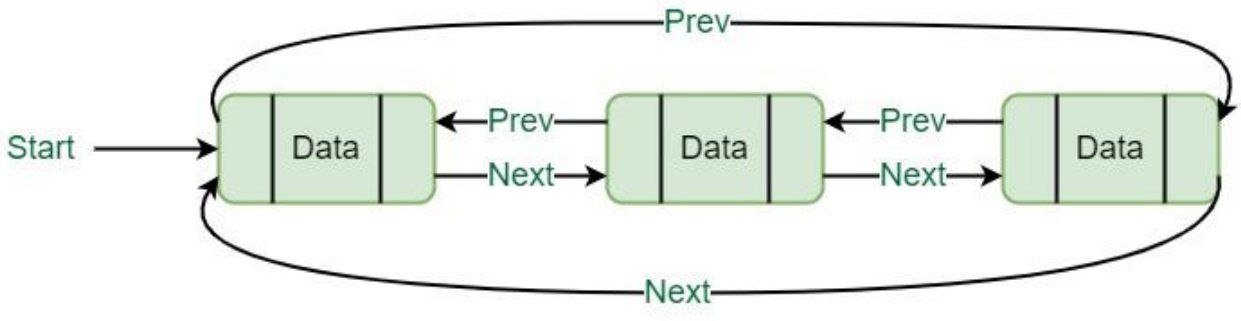
```
let rec pgcd a b = if a = 0 then b else pgcd (b mod a) a

let add_frac f1 f2 =
  let n = f1.num * f2.denom + f2.num * f1.denom in
  let d = f1.denom * f2.denom in
  let k = pgcd n d in
  {num = n/k; denom = d/k}

let add x y = match x, y with
  | Real a, b | b, Real a
    -> Real (a +. float_of_num b)
  | Fraction f1, Fraction f2
    -> Fraction (add_frac f1 f2)
  | Fraction f, Integer n | Integer n, Fraction f
    -> Fraction (add_frac f {num = n; denom = 1})
  | Integer n1, Integer n2
    -> Integer (n1 + n2)
```

Partie V. Listes doublement chaînées circulaires (C) – 14 pts

Voici un schéma illustrant le principe d'une liste doublement chaînée circulaire :



Cette structure de données permet d'implémenter facilement une file d'attente à double extrémité (deque), puisque l'on peut accéder facilement à la tête de la file ou à la queue de la file, ce qui permet d'avoir des opérations `enfiler` et `defiler` en $O(1)$ à droite comme à gauche. On propose l'implémentation suivante en C :

```c
struct maillon_s {
  int val;
  struct maillon *prev;
  struct maillon *next;
};
typedef struct maillon_s maillon;

struct liste_s {
  maillon *start;
};
typedef struct liste_s liste;

liste *creer_liste(void) {
  liste *l = malloc(sizeof(liste));
  l->start = NULL;
  return l;
}

bool est_vide(liste *l) {
  return l->start == NULL;
}
```

☐ 24 – Donner un ou plusieurs invariants qui doivent être vérifiés par tous les maillons pour que la structure reste correcte telle qu'illustrée sur le schéma.

Réponse 24. Pour tout maillon m, on a m->next->prev == m et m->prev->next == m.

☐ 25 – Écrire une fonction maillon *singleton(**int** x) qui créé et renvoie l'unique maillon d'une liste qui ne contient que l'élément x.

Réponse 25.

C

```c
maillon *singleton(int x){
  maillon *m = malloc(sizeof(maillon));
  m->val = x;
  m->next = m;
  m->prev = m;
  return m;
}
```

☐ 26 – Écrire une fonction **void** pushR(**int** x, liste ∗l) qui permet d'ajouter un élément x à la queue d'une liste circulaire doublement chaînée l. La complexité doit avoir pour complexité $O(1)$.

Réponse 26.

C

```c
void pushR(int x, liste *l) {
  if (est_vide(l)){
    l->start = singleton(x);
    return;
  }
  maillon *m = malloc(sizeof(maillon));
  m->val = x;
  maillon *last = l->start->prev;
  m->prev = last;
  m->next = l->start;
  last->next = m;
  l->start->prev = m;
}
```

☐ 27 – En déduire la fonction **void** pushL(**int** x, liste ∗l) qui ajoute l'élément x en tête de la liste l. La complexité doit être $O(1)$.

Réponse 27.

C

```c
void pushL(int x, liste *l) {
  pushR(x, l);
  l->start = l->start->prev;
}
```

On suppose l'existence de la fonction d'affichage suivante :

```c
void print_int(int x) {
  printf("%i\n",x);
}
```

☐ 28 – Écrire une fonction **void** affiche_liste(liste ∗l) qui affiche tous les éléments d'une liste circulaire doublement chaînée.

Réponse 28.

C

```c
void affiche_liste(liste *l) {
  if (est_vide(l)) {
    return;
  }
  maillon *m = l->start;
  print_int(m->val);
  m = m->next;
  while (m != l->start) {
    print_int(m->val);
    m = m->next;
  }
}
```

☐ 29 – Écrire une fonction **void** supprime_maillon(liste ∗l, maillon ∗m) qui supprime le maillon l de la liste m. On suppose que le maillon m appartient bien à la liste l, ce que l'on ne vérifiera pas. Si m est le maillon de tête, on fera attention à modifier le pointeur vers la tête de la liste. La complexité doit être $O(1)$.

Réponse 29.

C

```c
void supprime_maillon(liste *l, maillon *m) {
  if (m->next == m) {
    l->start = NULL;
    free(m);
    return;
  }
  if (l->start == m) {
    l->start = m->next;
  }
  m->next->prev = m->prev;
  m->prev->next = m->next;
  free(m);
}
```

☐ 30 – En déduire les fonctions **int** popR(liste ∗l) et **int** popL(liste ∗l) qui suppriment de la liste l et renvoie respectivement l'élément de queue de la liste l et l'élément de tête de la liste l. Les complexités doivent être $O(1)$.

Réponse 30.

C

```c
int popR(liste *l){
  int x = l->start->prev->val;
  supprime_maillon(l, l->start->prev);
  return x;
}

int popL(liste *l){
  int x = l->start->val;
  supprime_maillon(l, l->start);
  return x;
}
```

Partie VI. Tri de pile (OCaml) – 18 pts

On rappelle les fonctions suivantes du module Stack qui implémente les piles.

- Stack.create : unit -> 'a Stack.t
  Return a new stack, initially empty.
- Stack.push : 'a -> 'a Stack.t -> unit
  Stack.push x s adds the element x at the end of the stack s.
- Stack.pop : 'a Stack.t -> 'a
  Stack.pop s removes and returns the first element in stack s, or raises Stack.Empty if the stack is empty.
- Stack.top : 'a Stack.t -> 'a
  Stack.top s returns the topmost element in stack s, or raises Stack.Empty if the stack is empty.
- Stack.is_empty : 'a Stack.t -> bool
  Return **true** if the given stack is empty, **false** otherwise.

☐ 31 – Écrire une fonction retourne : 'a Stack.t -> 'a Stack.t -> unit qui permet de retourner une pile sur le dessus d'une autre. Après l'appel retourne s1 s2, la pile s_2 contient sur le dessus les éléments de la pile s_1 dans l'ordre inverse. Les éléments de s_2 restent au dessous. La pile s_1 est vidée.

Réponse 31.


```
let rec retourne s1 s2 =
  try Stack.push (Stack.pop s1) s2;
      retourne s1 s2
  with Stack.Empty -> ();;
```

Nous souhaitons trier une pile en faisant à chaque étape "couler" le plus grand élément vers le bas de la pile. Voici une fonction qui implémente cette idée en OCaml.

```
let coule s1 =
  let rec coule_aux s1 cur_max s2 =
    if not (Stack.is_empty s1) then
      begin
        let x = Stack.pop s1 in
        let (min,max) =
          if x > cur_max then
            (cur_max,x)
          else
            (x,cur_max)
        in
        Stack.push min s2;
        coule_aux s1 max s2
      end
    else
      Stack.push cur_max s2
  in try
    let s2 = Stack.create () in
    let cur_max = Stack.pop s1 in
    coule_aux s1 cur_max s2; retourne s2 s1
  with Stack.Empty -> ();;
```

☐ 32 – Que fait la partie suivante de la fonction ?

```
let (min,max) =
  if x > cur_max then
    (cur_max,x)
  else
    (x,cur_max)
in
```

Réponse 32. Elle définit localement la variable min comme étant la plus petite des deux valeurs x et cur_max, et max comme étant la plus grande des deux.

☐ 33 – Si on applique cette fonction à une pile contenant les éléments $[3;2;1;5;4]$, le 3 étant sur le dessus de la pile, qu'obtient-on à la fin de la fonction ?

Réponse 33. Après appel de la fonction la pile contient $[2;1;3;4;5]$.

☐ 34 – Que se passe-t-il si on applique cette fonction à une pile déjà triée (avec le plus petit élément au dessus) ?

Réponse 34. À chaque étape, on empile cur_max et on fait un appel récursif où cur_max prend la valeur suivante de s1.
Donc par récurrence, à la fin de l'appel à coule_aux, la pile s2 contient tous les éléments qui étaient dans s1 dans l'ordre inverse.
Après l'appel à retourne, s1 contient donc la même chose qu'au début.

☐ 35 – Que se passe-t-il si on applique cette fonction à une pile triée à l'envers (avec le plus petit élément au dessous) ?

Réponse 35. La valeur de cur_max est prise par le premier élément de la pile et ne change jamais. On retrouve donc dans s2 tous les éléments de s1 dans l'ordre inverse, sauf le premier qui se retrouve tout en haut.
Après l'appel à retourne, l'élément le plus grand se retrouver tout en bas, et l'ordre des autres éléments reste inchangé.

☐ 36 – Démontrer que si la pile s_1 contient au moins $k+1$ éléments dont les k plus grand éléments sont triés sur le dessous de la pile, après l'appel coule s1, s_1 contient au moins $k+1$ éléments triés à la fin.

Réponse 36. Si on note $s_1, s_2, \ldots, s_{k+1}$ les $k+1$ plus grands éléments, au moment de dépiler s_k, cur_max a pour valeur s_{k+1}, et l'ordre de ces éléments est conservé comme prouvé à la question 34.

☐ 37 – Combien d'appels à la fonction coule doit-on effectuer pour être sur que la liste soit triée ?

Réponse 37. Si la pile contient n éléments, elle sera forcément triée au bout de n appels à coule, par récurrence en utilisant la question 36.

☐ 38 – Proposer une modification (si votre programme est proche, indiquer les lignes qui changent, les ajouts et suppressions uniquement) de la fonction coule pour qu'elle renvoie un booléen indiquant si la liste est déjà triée ou non :

coule : 'a Stack.t −> bool

renvoie **true** si la liste est triée et **false** sinon.
On pourra utiliser une référence de booléen, définie avec le constructeur `ref`*, à laquelle on affecte une nouvelle valeur en utilisant l'opérateur* `:=`*, et dont on lit la valeur avec l'opérateur préfixe* `!`*.*

Réponse 38.

```
let coule s1 =
  let flag = ref true in
  let rec coule_aux s1 cur_max s2 =
    if not (Stack.is_empty s1) then
      begin
        let x = Stack.pop s1 in
        let (min,max) =
          if x >= cur_max then
            (cur_max,x)
          else
            (flag := false;(x,cur_max))
        in
        Stack.push min s2;
        coule_aux s1 max s2
      end
    else
      Stack.push cur_max s2
  in try
    let s2 = Stack.create () in
    let cur_max = Stack.pop s1 in
    coule_aux s1 cur_max s2; retourne s2 s1; !flag
  with Stack.Empty -> (); !flag;;
```

☐ 39 – Écrire une fonction trie : 'a Stack.t -> unit qui trie une pile.

Réponse 39.

```
let trie s = while (not (coule s)) do () done;;
```

Partie VII. Mots bien parenthésés (OCaml) – 8 pts

On souhaite déterminer si une chaîne de caractère contenant deux types de parenthèses () et [] est bien parenthésée ou non. Par exemple :

`"Bonjour ( je m'appe[ll]e ) [Florian]"`

est bien parenthésée, contrairement à

`"He[llo (Worl]d)"`

☐ 40 – Écrire une fonction check : string -> bool qui teste si une chaîne de caractères et bien parenthésée.
Pour cette question, toute trace de recherche, même infructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

Réponse 40.

```
let dyck str =
  let s = Stack.create () in
  let rec parcours i =
    if i = String.length str then
      Stack.is_empty s
    else
      let c = str.[i] in
      if c = '(' || c = '(' then
```

```
      (Stack.push c s; parcours (i+1))
    else if c = ')' then
      Stack.pop s = '(' && parcours (i+1)
    else if c = ']' then
      Stack.pop s = '[' && parcours (i+1)
    else
      parcours (i+1)
in parcours 0;;
```

Fin de l'épreuve