Grammaires non contextuelles

Florian Bourse

Question 1. Donner des grammaires non-contextuelles qui engendrent les langages suivants :

1. $\{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_1 \geq 3\}$
2. $\left\{w \in \{0,1\}^* \mid w = w^{\mathcal{R}} \wedge |w| = 0 \mod 2\right\}$
3. $\left\{w \in \{0,1\}^* \mid |w| = 1 \mod 2 \wedge w_{(|w|-1)/2} = 0\right\}$
4. $\left\{a^i b^j c^k \mid i,j,k \geq 0 \wedge (i = j \vee j = k)\right\}$
5. $\left\{a^i b^j c^k \mid i,j,k \geq 0 \wedge (i + j = k)\right\}$
6. $\left\{a^i b^j c^k \mid i,j,k \geq 0 \wedge (i + k = j)\right\}$
7. $\{ab^n acab^n a \mid n \geq 0\}$
8. $\emptyset$
9. Les mots bien parenthésés
10. Les expressions arithmétiques valides
11. Le langage décrit par l'expression régulière `(a(bb|cc)b)*a`

Question 2. Donner les langages engendrés par les grammaires suivantes :

1. $S \rightarrow aSa \mid bSb \mid c \mid d$
2. $$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & AB \\ A & \rightarrow & aA \mid c \\ B & \rightarrow & Bb \mid d \end{array}$$
3. $$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & A \\ A & \rightarrow & aAa \mid B \\ B & \rightarrow & bBb \mid c \end{array}$$
4. $$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & A \mid B \\ A & \rightarrow & aAbb \mid a \\ B & \rightarrow & aaBb \mid b \end{array}$$

Question 3.

1. Donner une grammaire non contextuelle qui engendre le langage des expressions régulières sur l'alphabet $\{0,1\}$ (on pourra remplacer ε par e pour éviter les confusions).
2. En utilisant votre grammaire, donner une dérivation et l'arbre de dérivation correspondant pour le mot `(0|(10)*1)*`.

Question 4. Pour les grammaires et mots suivants, donner un arbre de dérivation, une dérivation gauche et une dérivation droite.

1. $$\begin{array}{lcl} S & \to & aAB \\ A & \to & aA \mid c \\ B & \to & Bb \mid d \end{array}$$
   $aacdb$
2. $$\begin{array}{lcl} S & \to & E \\ E & \to & a \mid [L] \mid [] \\ L & \to & E, L \mid E \end{array}$$
   $[a, [a]]$
3. $$\begin{array}{lcl} S & \to & E \\ E & \to & E + T \mid T \\ T & \to & T * F \mid F \\ F & \to & -F \mid F1 \\ F1 & \to & F2 ** F1 \mid F2 \\ F2 & \to & a \end{array}$$
   $a + -a ** a$
4. $$\begin{array}{lcl} S & \to & E \\ E & \to & E + T \mid T \\ T & \to & T * F \mid F \\ F & \to & -F \mid a \end{array}$$
   $a * a + -a$

Question 5. Il y a différentes manières de parser les expressions arithmétiques valides. Trouver une grammaire non ambigüe et dans laquelle les arbres de parsing donne la priorité à $\times$ par rapport à $+$ (i.e., $2 + 3 \times 4$ est vue comme l'expression qui vaut 14 et non 20).

Question 6. Prouver que les grammaires définies par les symboles S et B reconnaissent le même langage mais que l'une est ambigüe et pas l'autre :

$$\begin{array}{lcl} B & \to & (O \mid \varepsilon \\ O & \to &) \mid (OO \end{array} \qquad\qquad S \to SS | (S) | \varepsilon$$