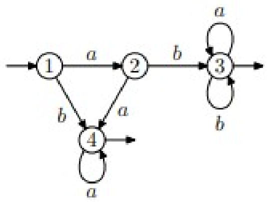
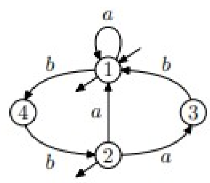
Automates

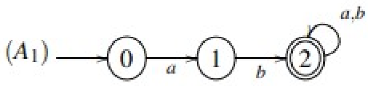
Florian Bourse

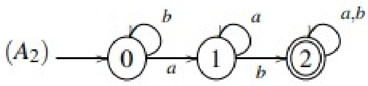
Question 1. Donner tous les mots de longueurs 0, 1, 2, 3 et 4 reconnus par les automates suivants :





Question 2. On considère deux qutomates A_1 et A_2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a; b\}$.





1. Dans quel état se trouve l'automate A_1 après lecture des mots a, ab, abb, $abba$? Après lecture du mot ε ?
2. Que se passe-t-il quand on donne le mot aab à lire à l'automate A_1 ?
3. Les mots aba^2b, a^2ba^2b, ab^4 et b^3a^2 sont-ils reconnus par l'automate A_1 ?
4. Décrire les mots reconnus par l'automate A_1.
5. Après lecture du mot b^3a^2, dans quel état se trouve l'automate A_2 ?
6. Y a-t-il des mots que l'automate A_2 ne peut pas lire jusqu'au bout ?
7. S'il n'a lu aucun a, dans quel état se trouve l'automate A_2 ?
8. Dans quels cas l'automate A_2 se trouve-t-il dans l'état 1 ?
9. Dans quels cas arrive-t-il à l'état final 2 ? Quels mots reconnaît-il ?

Question 3. Sur l'alphabet $\Sigma = \{0; 1\}$, donner un automate qui reconnaît le langage des mots qui ne contiennent pas le facteur 001.

Question 4. Sur l'alphabet $\Sigma = \{0; 1\}$, donner un automate qui reconnaît le langage des mots dans lesquels toute occurence de 1 est suivie de deux occurences de 0.

Question 5. Sur l'alphabet $\Sigma = \{0; 1\}$, donner un automate qui reconnaît le langage des mots ne contenant pas deux occurences de 0 successives.

Question 6. Sur l'alphabet $\Sigma = \{0; 1\}$, donner un automate qui reconnaît le langage des mots dans lesquels le nombre d'occurences de 1 est pair.

Question 7. Sur l'alphabet $\Sigma = \{0; 1\}$, donner un automate qui reconnaît le langage des multiples de 3 en base 2, où les bits de poids forts sont donnés en premier (big-endian/grand-boutisme).

Question 8. Sur l'alphabet $\Sigma = \{0; 1\}$, donner un automate qui reconnaît le langage des nombres non divisible par 3, où les bits de poids faible sont donnés en premier (little-endian/petit-boutisme).

Question 9. Un passeur doit faire passer d'une rive à l'autre un loup, une chèvre et une salade. Toutefois, son bateau ne peut transporter qu'un seul passager en dehors de lui-même. Bien entendu, il ne peut laisser le loup et la chèvre seuls sans surveillance, sinon le loup mangera la chèvre. Même chose pour le couple chèvre-salade, car la chèvre rêve de manger la salade. Chaque état représente les protagonistes sur la rive opposée. Ainsi l'état CP signifie et que la chèvre et le passeur sont sur la rive opposée (et que le loup et la salade n'ont pas encore traversé). Comme le précise l'énoncé, certains états sont interdits. L'état initial est $\emptyset$ et l'état final est CLPS. Les actions possibles (qui constituent donc l'alphabet de l'automate) sont les suivantes :

1. traverser seul (P)
2. traverser avec le loup (L)
3. traverser avec la chèvre (C)
4. traverser avec la salade (S)

Dessinez un automate déterministe possèdant le moins d'états possibles permettant de trouver toutes les solutions au problème.

Question 10. Soit $L \subset \Sigma^*$ un langage reconnaissable. Montrer que les langages suivants sont reconnaissables :

1. $\{w \in L |$aucun préfixe strict de w n'est dans $L\}$
2. $\{w \in \Sigma^* |$aucun préfixe strict de w n'est dans $L\}$
3. $\{w \in L | w$ n'est préfixe strict d'aucun mot de $L\}$
4. $\{w \in \Sigma^* | w$ est préfixe d'un mot de $L\}$
5. $\{w \in \Sigma^* |$le mirroir de w est dans $L\}$

Question 11. On appelle L_i le langage des mots de longueur i sur l'alphabet $\{a; b\}$ possédant autant de a que de b.

1. Dessinez l'automate ayant un nombre minimal d'états reconnaissant le langage L_2
2. Même question pour L_4
3. Même question pour L_6
4. Combien d'états comporte l'automate minimal reconnaissant le langage L_{10} ?
5. Même question pour L_{100}
6. Quelle conclusion en tirez vous sur la nature du langage $L = \cup_{i=0}^{+\infty} L_i$ des mots possédant autant de a que de b ?

Question 12. Éliminez les transitions spontanées des automates suivants :

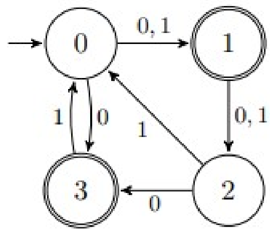
		a	b	ε
$\rightarrow$	0	1	2	3
	1	3	2	0
	2	3	0	1
$\leftarrow$	3	0	1	2

		a	b	ε
$\rightarrow$	0	1		2
	1		2	4
	2	3		4
$\leftarrow$	3		0	
$\leftarrow$	4	2	3	

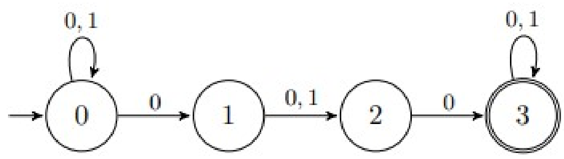
Question 13. Un mot w est un carré si il existe v tel que $w = vv$.

— Le langage des mots dont aucun sous-mot n'est un carré est-il reconnaissable ?
— Le langage des mots dont aucun facteur n'est un carré est-il reconnaissable ?
On pourra considérer le morphisme : $a \mapsto abc, b \mapsto ac, c \mapsto b$

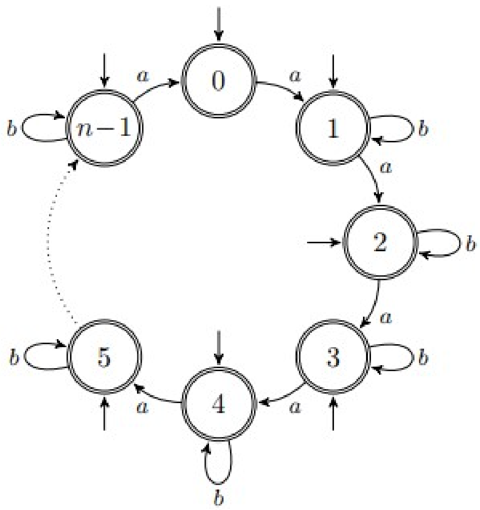
Question 14. Donner un automate fini déterministe équivalent à l'automate suivant :



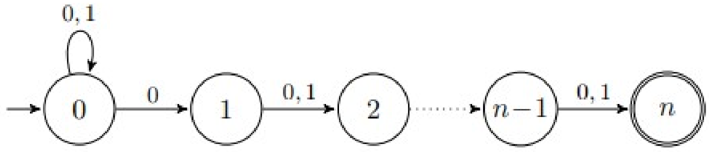
Question 15. Donner un automate fini déterministe équivalent à l'automate suivant :



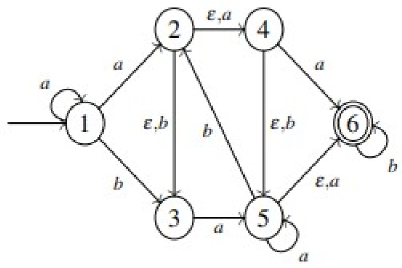
Question 16. Donner un automate fini déterministe équivalent à l'automate suivant :



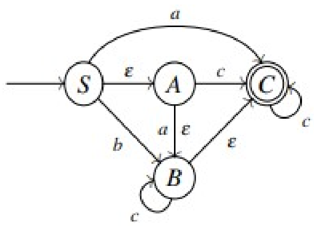
Question 17. Donner un automate fini déterministe équivalent à l'automate suivant :



Question 18. Donner un automate fini déterministe équivalent à l'automate suivant :



Question 19. On considère l'automate $\mathcal{A}_1$ suivant :



1. Construire un automate $\mathcal{A}_2$ équivalent à $\mathcal{A}_1$, sans ε-transition et sans état inaccessible. On donnera sa table de transition.
2. Construire un automate $\mathcal{A}_3$ déterministe et sans état inaccessible, équivalent à $\mathcal{A}_2$. Représenter son graphe des transitions.
3. Construire un automate minimal $\mathcal{A}_4$ équivalent à $\mathcal{A}_3$.
4. Quel est le langage accepté par $\mathcal{A}_1$?

Question 20. Déterminiser les automates suivants :

		a	b	c	d
$\rightarrow$	0	$\{1,2\}$	3	1	2
	1	0	$\{1,3\}$	1	2
	2	1	3	$\{0,3\}$	0
$\leftarrow$	3	2	1	0	$\{2,0\}$

		a	b	c	d
$\rightarrow$	0	$\{1,2\}$	3	$\{1,3\}$	2
	1	0	$\{1,3\}$	1	$\{1,2\}$
	2	$\{1,3\}$	3	$\{0,3\}$	0
$\leftarrow$	3	2	$\{0,1\}$	0	$\{2,0\}$