

Exercices sur les arbres couvrants minimaux

Florian Bourse

0 Démontrer ou infirmer les assertions suivantes :

- a) Dans un graphe non orienté pondéré par une fonction injective, tout arbre couvrant de poids minimum contient l'arête de poids minimum.
- b) Dans un graphe non orienté pondéré par une fonction injective, aucun arbre couvrant de poids minimum ne contient l'arête de poids maximum.
- c) Dans un graphe non orienté pondéré par une fonction injective, il n'existe qu'un seul arbre couvrant de poids minimum.
- d) Pour tout sous graphe $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$, on note $\ell(\mathcal{H})$ la suite des poids des arêtes de $\mathcal{H}$ triés dans l'ordre croissant.
Pour deux arbres couvrants de poids minimum $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$, on a $\ell(\mathcal{T}) = \ell(\mathcal{T}')$.

1 On considère la variante suivante de l'algorithme de Kruskal sur un graphe (S, A) :

$\mathcal{F} = \emptyset$
 $\forall e \in A :$
 $\mathcal{F} = \mathcal{F} \cup \{e\}$
Si $\mathcal{F}$ contient un cycle, retirer une arête de poids maximal de ce cycle de $\mathcal{F}$.
Renvoyer $\mathcal{F}$.

- a) Montrer que cet algorithme renvoie un arbre couvrant de poids minimum.
- b) Estimer la complexité de cet algorithme.

2 Étant donné un graphe $G = (S, A)$, Alice et Bob jouent à choisir chacun leur tour une arête du graphe, de sorte que l'ensemble des arêtes choisies ne contient pas de cycle. C'est Alice qui commence. Déterminer la meilleure stratégie pour chacun des deux joueurs et qui a le plus de chances de gagner.