Oraux blancs MPI
type CCMT

Florian Bourse

Exercice 1

1. Énoncer le théorème de Cook-Levin.
2. On considère le langage $\mathcal{L}$ des formes normales conjonctives, par exemple
   `$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)\wedge (x_2 \vee \bar{x}_1)$`
   On pourra se contenter d'utiliser les symboles $\wedge$, $\vee$ et $\bar{x}$.
3. Donner une grammaire non-contextuelle qui engendre $\mathcal{L}$.
4. Déterminer si $\mathcal{L}$ est régulier ou non.
5. On considère le problème CNF-TAUT suivant :

   Instance : Une formule φ sous forme normale conjonctive.
   Solution : V si et seulement si φ est une tautologie.

   Montrer que CNF-TAUT $\in$ P.
6. On considère le problème DNF-TAUT suivant :

   Instance : Une formule φ sous forme normale disjonctive.
   Solution : V si et seulement si φ est une tautologie.

   Montrer que si DNF-TAUT $\in$ P, alors P $=$ NP.
   On pourra utiliser sans le démontrer SAT $\leq_P$ CNF-SAT.

Exercice 2

Dans cet exercice, on considère un graphe $G = (S, A)$ orienté.

1. Rappeler la définition d'un tri topologique et donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe.
2. Soit $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}$ un tri topologique de G. Donner le degré de s_{n-1}.
3. En déduire un algorithme permettant de calculer un tri topologique de G.
   On pourra commencer par construire le graphe transposé G^t de G.
4. On se place à présent dans le cas d'un jeu à deux joueurs sur un graphe biparti $G = (S_1, S_2, A)$, où les positions finales gagnants pour le joueur 1 sont notées G_1 et les positions finales gagnantes pour le joueur 2 sont notées G_2.
5. On pose la suite d'états X_n définie par :

$$\begin{aligned} X_0 &= G_1 \\ X_{n+1} &= X_n \cup \{s \in S_1 \mid \texttt{succ}(s) \cap X_n \neq \emptyset\} \cup \{s \in S_2 \mid \texttt{succ}(s) \neq \emptyset \wedge \texttt{succ}(s) \subset X_n\} \end{aligned}$$

   Montrer qu'il est possible de calculer $\cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ en temps linéaire.