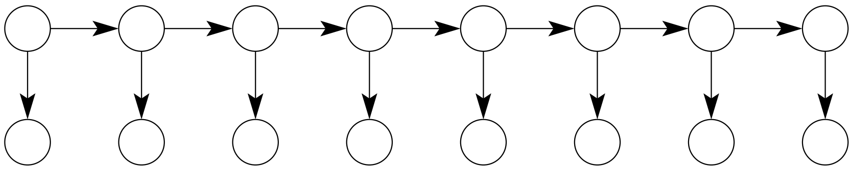
Cours MVA 2005 - Modèles graphiques

Exercises à rendre pour le 8 Novembre 2005

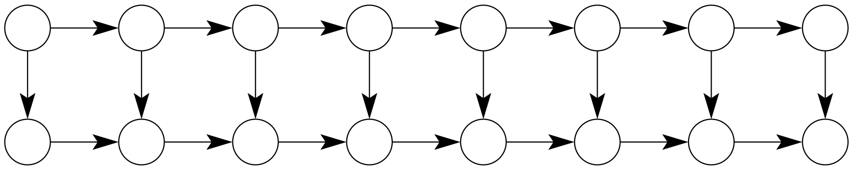
1 Elimination pour modèles dynamiques

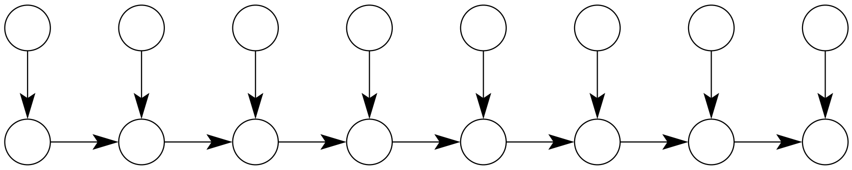
Pour chacun des 4 graphes suivants,

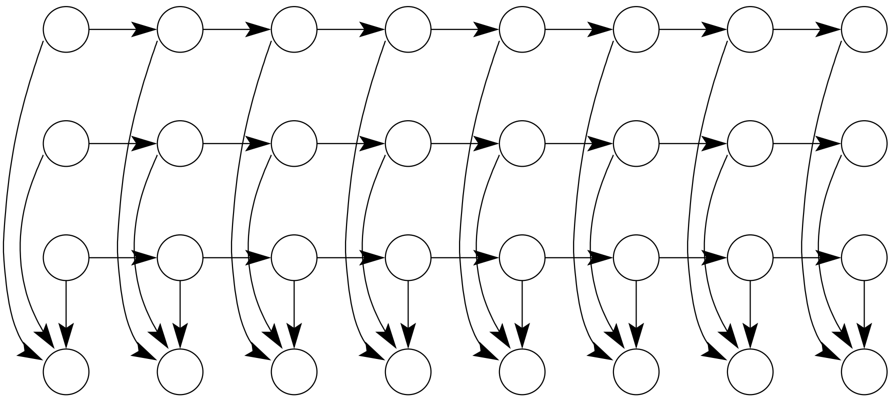
- Déterminer la largeur arborescente (treewidth). Preuve non exigée.
- Exhiber un ordre d'élimination et le graphe reconstitué correspondants



(exemple de modèle de Markov caché)







(exemple de modèle de Markov caché *factoriel*)

2 Estimation de paramêtres - Lois normales

1. Etant donnés N points i.i.d. $x_i \in \mathbb{R}^p$, $i = 1,\ldots,N$, calculer l'estimateur de maximum de vraisemblance pour la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\Sigma)$, de densité

$$p(x|\mu,\Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}(\det\Sigma)^{1/2}}\exp(-\frac{1}{2}(x-\mu)^\top\Sigma^{-1}(x-\mu))$$

   où $\mu \in \mathbb{R}^p$ et $\Sigma \in \mathbb{R}^{p\times p}$.

2. Etant donnés N points i.i.d. $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,\ldots,N$, calculer la densité a posteriori du paramètre $\mu \in \mathbb{R}$ dans le modèle Bayésien suivant:

$$x|\mu \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2),\;\; \mu\;\sim \mathcal{N}(\mu_0,\tau^2),\;\; \sigma^2,\, \tau^2 \in \mathbb{R},\, \mu_0 \in \mathbb{R} \text{ constants}$$

3. Etant donnés N points i.i.d. $x_i \in \mathbb{R}^p$, $i = 1,\ldots,N$, calculer la densité a posteriori du paramètre $\mu \in \mathbb{R}^p$ dans le modèle Bayésien suivant:

$$x|\mu \sim \mathcal{N}(\mu,\Sigma),\;\; \mu\;\sim \mathcal{N}(\mu_0,T),\;\; \Sigma,\, T \in \mathbb{R}^{p\times p},\, \mu_0 \in \mathbb{R}^p \text{ constants}$$

3 Probabilités marginales - algorithme somme produit et paires

Soit T un arbre non orienté à n sommets et $n-1$ arêtes. Soit $V = \{1,\ldots,n\}$ l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes. Soit $u(x)$ un produit de potentiels positifs se factorisant dans T, i.e.,

$$u(x) = \prod_{(i,j)\in E}\psi(x_i,x_j)\prod_{i\in V}\psi(x_i)$$

Les marginales sur les singletons et sur les paires d'éléments voisins dans T sont définies par

$$\forall i \in V,\, a(x_i) = \sum_{x_j,j\neq i} u(x)$$

$$\forall (i,j) \in E,\, a(x_i,x_j) = \sum_{x_k,k\neq i,j} u(x)$$

Le message passé de i vers j est égal à

$$m_{ij}(x_j) = \sum_{x_i}\psi(x_i)\psi(x_i,x_j)\prod_{k\in\mathcal{N}(i)\setminus\{j\}} m_{ki}(x_i)$$

Montrer que une fois que les $2(n-1)$ messages sont passés en “série”, i.e., en suivant un ordre respectant la structure de l'arbre, les marginales sont égales à:

$$\forall i \in V,\, a(x_i) = \psi(x_i) \prod_{k \in \mathcal{N}(i)} m_{ki}(x_i) \tag{1}$$

$$\forall (i,j) \in E,\, a(x_i,x_j) = \psi(x_i)\psi(x_j)\psi(x_i,x_j) \prod_{k \in \mathcal{N}(i)\setminus\{j\}} m_{ki}(x_i) \prod_{k \in \mathcal{N}(j)\setminus\{i\}} m_{kj}(x_j) \tag{2}$$

Indication: la démonstration se fait par récurrence, exactement comme vue en cours pour montrer Eq. (1).