École normale supérieure
MPRI, M2, 2.6

Cours "Interprétation abstraite : application à la vérification et à l'analyse statique"

Corrigé de l'examen du 2 décembre 2005

8h45 – 11h45. Salle U/V

Question 3

- si $f\#$ est correcte et complète, alors :

$$
\begin{array}{ll}
f\# \circ \mu \;\dot{\leq}\; \mu \circ f & \{ f\# \text{ complète} \} \\
\mu \circ f \;\dot{\leq}\; f\# \circ \mu & \{ f\# \text{ correcte} \} \\
\mu \circ f \circ \mu \;\dot{\leq}\; f\# \circ \mu \circ \mu & \{ \text{monotonie} \} \\
\mu \circ f \circ \mu \;\dot{\leq}\; f\# \circ \mu & \{ \text{idempotence} \} \\
\mu \circ f \circ \mu \;\dot{\leq}\; \mu \circ f & \{ \text{transitivité} \} \\
\hat{f} \circ \mu \;\dot{\leq}\; \mu \circ f & \{ \text{def } \hat{f} \}
\end{array}
$$

et donc $\hat{f}$ est complète.

- Réciproquement, si $\hat{f}$ est complète alors

$$
\begin{array}{ll}
\mu \circ f \;\dot{\leq}\; \mu \circ f \circ \mu & \{ \mu \text{ extensive, monotonie} \} \\
\mu \circ f \;\dot{\leq}\; \hat{f} \circ \mu & \{ \text{def. } \hat{f} \}
\end{array}
$$

et donc $\hat{f}$ est toujours correcte. On peut donc choisir $f^{\#} = \hat{f}$. $\square$

<u>question 1</u>

- $\forall x \in X : x \leq \rho(x)$ {ρ extensive}

$$\wedge X \leq \bigwedge_{x \in X} \rho(x) \quad \{\text{def. } \wedge\}$$

$$\rho(\wedge X) \leq \rho(\bigwedge_{x \in X} \rho(x)) \quad \{\text{monotonie}\}$$

- $\forall x \in X : \bigwedge_{y \in X} \rho(y) \leq \rho(x)$ {def. $\wedge$}

$$\rho(\bigwedge_{y \in X} \rho(y)) \leq \rho(\rho(x)) \quad \{\text{monotonie}\}$$

$$\rho(\bigwedge_{y \in X} \rho(y)) \leq \rho(x) \quad \{\text{idempotence}\}$$

$$\rho(\bigwedge_{y \in X} \rho(y)) \leq \bigwedge_{x \in X} \rho(x) \quad \{\text{def. } \wedge\}$$

$$\rho(\wedge \rho(X)) \leq \wedge \rho(X) \quad \{\text{def. } \rho(X) = \{\rho(x) \mid x \in X\}\}$$

- $\wedge \rho(X) = \rho(\wedge \rho(X))$ {antisymétrie}

$\square$

Question 4

- $\mathrm{lfp}\, f = f(\mathrm{lfp}\, f)$ {point fixe existe par Tarski}

$\mu(\mathrm{lfp}\, f) = \mu \circ f(\mathrm{lfp}\, f)$ {Leibnitz}

$\mu(\mathrm{lfp}\, f) = \mu \circ f \circ \mu(\mathrm{lfp}\, f)$ {hypothèse}

$\mu(\mathrm{lfp}\, f)$ est un point fixe de $\mu \circ f$ monotone

$\mathrm{lfp}\, \mu \circ f \leq \mu(\mathrm{lfp}\, f)$ {def. lfp}.

- $\mu \circ f(x) \leq x \Rightarrow f(x) \leq x$ {μ extensive et $\leq$ transitive}

$\{\mu(x) \mid \mu \circ f(x) \leq x\} \subseteq \{\mu(x) \mid f(x) \leq x\}$ {def. $\subseteq$}

$\wedge \{\mu(x) \mid f(x) \leq x\} \leq \wedge \{\mu(x) \mid \mu \circ f(x) \leq x\}$ {def. $\wedge$}

$\mu(\wedge \{\mu(x) \mid f(x) \leq x\}) \leq \mu(\wedge \{\mu(x) \mid \mu \circ f(x) \leq x\})$ {μ croissant}

$\mu(\wedge \mu(\{x \mid f(x) \leq x\})) \leq \mu(\wedge \mu(\{x \mid \mu \circ f(x) \leq x\}))$ {def. $\mu(X)$}

$\mu(\wedge \{x \mid f(x) \leq x\}) \leq \mu(\wedge \{x \mid \mu \circ f(x) \leq x\})$ {question 1}

$\mu(\mathrm{lfp}\, f) \leq \mu\, \mathrm{lfp}(\mu \circ f)$ {Tarski}

Mais $\mu \circ f(\mathrm{lfp}\, \mu \circ f) = \mathrm{lfp}(\mu \circ f)$ {def. point fixe} donc $\mathrm{lfp}\, \mu \circ f \in \mu(C)$ donc $\mu(\mathrm{lfp}\, \mu \circ f) = \mathrm{lfp}\, \mu \circ f$ {μ idempotente} et donc

$\mu(\mathrm{lfp}\, f) \leq \mathrm{lfp}\, \mu \circ f$

- Par antisymétrie $\mu(\mathrm{lfp}\, f) = \mathrm{lfp}\, \mu \circ f$. $\square$

question 2

On pose $\hat{f} = \mu \circ f$. On a

$$1 \stackrel{.}{\leq} \mu \quad \{\mu \text{ extensive}\}$$

$$\mu \circ f \stackrel{.}{\leq} \mu \circ f \circ \mu \quad \{\mu \circ f \text{ croissante}\}$$

$$\mu \circ f \stackrel{.}{\leq} \hat{f} \circ \mu \quad \{\text{def. } \hat{f}\}$$

donc $\hat{f}$ est correcte.

Si on considère la restriction de $\hat{f}$ à $\mu(C)$, on a $\forall x \in \mu(C) : \mu \circ f(x) \in \mu(C)$ donc $f \in \mu(C) \to \mu(C)$. Mais $x \in \mu(C)$ implique $\exists y \in C : \mu(y) = x$.

On a donc

$$\begin{aligned}
& \mu \circ f(x) \\
= \ & \mu \circ f \circ \mu(y) && \{\text{def. } x = \mu(y)\} \\
= \ & \mu \circ f \circ \mu \circ \mu(y) && \{\mu \text{ idempotente}\} \\
= \ & \mu \circ f \circ \mu(x) && \{\text{def } x = \mu(y)\}
\end{aligned}$$

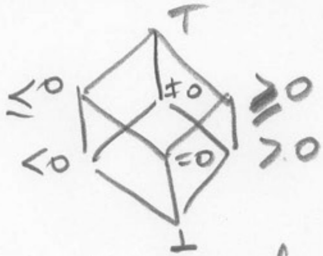
ce qui montre quee $\hat{f} = \hat{f} \circ \mu$

$= \mu \circ f \circ \mu$ pour $\hat{f} \in \mu(C) \to \mu(C)$

$\square$

question 5

On considère le treillis des signes



L'addition abstraite $\oplus$ n'est pas complète

car $\{2\} + \{-1\} = \{1\}$

$$\mu\left(\{2\} + \{-1\}\right) = \mu\left(\{1\}\right) = {>}0$$

tandis que

$$\mu\left(\{2\}\right) \oplus \mu\left(\{-1\}\right) = {\geq}0 \oplus {<}0 = \top .$$

$\square$

question 6

- Si les μ_γ, $\gamma < \lambda$ sont correcte et complète pour $f \in C \xrightarrow{m} C$.

on a $\mu_\gamma \circ f \circ \mu_\gamma = \mu_\gamma \circ f$.

– On a $\left(\dot{\bigwedge\limits_{\gamma'<\lambda}} \mu_{\gamma'}\right) \dot{\leq} \mu_\gamma$ $\quad$ {def $\dot{\wedge}$ et $\gamma < \lambda$}

et donc d'une part

$$\left(\dot{\bigwedge_{\gamma'<\lambda}} \mu_{\gamma'}\right) \circ f \circ \mu_\gamma \dot{\leq} \mu_\gamma \circ f \circ \mu_\gamma \quad \{\text{Leibnitz}\}$$

$$\left(\dot{\bigwedge_{\gamma'<\lambda}} \mu_{\gamma'}\right) \circ f \circ \mu_\gamma \dot{\leq} \mu_\gamma \circ f \quad \{\text{hypothèse}\}$$

et donc, d'autre part

$$\left(\bigwedge_{\gamma'<\lambda} \mu_{\gamma'}\right) \circ f \circ \left(\bigwedge_{\gamma'<\lambda} \mu_{\gamma'}\right) \dot{\leq} \bigwedge_{\gamma'<\lambda} \mu_{\gamma'} \circ f \circ \mu_\gamma \quad \{\text{monotonie}\}$$

de sorte que par transitivité :

$$\left(\dot{\bigwedge_{\gamma'<\lambda}} \mu_{\gamma'}\right) \circ f \circ \left(\dot{\bigwedge_{\gamma'<\lambda}} \mu_{\gamma'}\right) \dot{\leqslant} \mu_\gamma \circ f$$

Par déf. $\wedge$ il vient

$$\left(\dot{\bigwedge_{\gamma'<\lambda}} \mu_{\gamma'}\right) \circ f \circ \left(\dot{\bigwedge_{\gamma'<\lambda}} \mu_{\gamma'}\right) \dot{\leqslant} \dot{\bigwedge_{\gamma<\lambda}} \left(\mu_\gamma \circ f\right)$$

et par déf $\dot{\wedge}$ et composition $\circ$, on conclut :

$$\left(\dot{\bigwedge_{\gamma<\lambda}} \mu_{\gamma}\right) \circ f \circ \left(\bigwedge_{\gamma<\lambda} \mu_{\gamma}\right) \dot{\leqslant} \left(\dot{\bigwedge_{\gamma<\lambda}} \mu_{\gamma}\right) \circ f$$

ce qui démontre la complétude de $\dot{\bigwedge_{\gamma<\lambda}} \mu_\gamma$ qui est l'intersection dans le treillis complet des fermetures (Ward) $\square$

• Soit $x \in C$. On a $\mu_\gamma(\mu_\gamma(x)) = \mu_\gamma(x)$ donc $\left(\dot{\bigsqcup_{\gamma<\lambda}} \mu_\gamma\right)(\mu_\gamma(x)) = \mu_\gamma(x)$. Il vient

$$\left(\bigsqcup_{\gamma'<\lambda} \mu_{\gamma'}\right) \circ f \circ \left(\bigsqcup_{\gamma'<\lambda} \mu_{\gamma'}\right)(x)$$

$$\dot{\leqslant} \left(\bigsqcup_{\gamma'<\lambda} \mu_{\gamma'}\right) \circ f \circ \left(\bigsqcup_{\gamma'<\lambda} \mu_{\gamma'}\right)(\mu_\gamma(x)) \qquad \{\mu_\gamma \text{ extensive et monotonie}\}$$

$$= \left(\bigsqcup_{\gamma'<\lambda} \mu_{\gamma'}\right) \circ f \circ \mu_\gamma(x) \qquad \{\text{ci-dessus}\}$$

$$= \left(\bigsqcup_{\gamma'<\lambda} \mu_{\gamma'}\right) \circ \mu_\gamma \circ f \circ \mu_\gamma(x) \qquad \{\text{hypothèse}\}$$

$$= \mu_\gamma \circ f \circ \nu_\gamma(x) \quad \{\text{ci-dessus}\}$$
$$= \mu_\gamma \circ f(x) \quad \{\text{hypothèse}\}$$

et donc, par déf. $\sqcup$

$$\leq \bigsqcup_{\gamma<\lambda} \mu_\gamma \circ f(x)$$
$$= \Big(\dot{\bigsqcup_{\gamma<\lambda}} \mu_\gamma\Big) \circ f\,(x)$$

ce qui prouve la complétude de $\dot{\bigsqcup}_{\gamma<\lambda} \mu_\gamma$. □

question 7

On pose $P = \{x' \in C \mid f(x') \leq y\}$. On note que $P \subseteq C$ et donc $\langle P, \leq \rangle$ est un ensemble partiellement ordonné puisque $\langle C, \leq \rangle$ est un ensemble partiellement ordonné. Si $f(x) \leq y$ alors $x \in P$ et donc, d'après le principe de la chaîne maximale de Hausdorff, la chaîne croissante réduite à x peut être étendue en une chaîne croissante Z maximale dans P qui contient x.

$$\forall z \in Z : f(z) \leq y \quad \text{car } Z \subseteq P$$
$$\bigvee_{z \in Z} f(z) \leq y \quad \{\text{déf } \vee \text{ dans } C\}$$
$$f(\vee Z) \leq y \quad \{\text{continuité de Scott}\}$$

donc $\vee Z \in P$. Supposons que $z' \in P$ soit tel que $\vee Z \leq z'$. Il vient que $Z \cup \{z'\}$

est une chaine croissante dans P qui contient x et donc, d'après le fait que Z est maximale ayant cette propriété dans P, il vient que $Z \cup \{z'\} \subseteq Z$ soit $z' \in Z$ et donc $z' \leq \vee Z$ soit $z' = \vee Z$ par antisymétrie. Ceci démontre que $\vee Z$ est un élément maximal de P. Il vient que $\vee Z \in \underline{\max}(\{x' \in C \mid f(x') \leq y\})$ et $x \leq \vee Z$. □

Question 8

- On commence par $(\Rightarrow)$. Soit $y \in \rho(C)$ et $m \in \underline{\max}(\{x \in C \mid f(x) \leq y\})$. On montre que $\rho(m) = m$.

$$f(m) \leq y$$
$$\Rightarrow \rho(f(m)) \leq \rho(y) = y \qquad \{\rho \in \underline{uco}(C), y \in \rho(C)\}$$
$$\Rightarrow \rho \circ f \circ \rho(m) \leq y \qquad \{hyp.\ \rho \circ f = \rho \circ f \circ \rho\}$$
$$\Rightarrow f \circ \rho(m) \leq y \qquad \{\rho \text{ extensive}\}$$
$$\Rightarrow \rho(m) \in \{x \in C \mid f(x) \leq y\}$$
$$m \leq \rho(m) \qquad \{\rho \text{ extensive}\}$$
$$\Rightarrow m = \rho(m) \qquad \{\text{car sinon } m < \rho(m) \text{ auquel cas } m \text{ ne serait pas maximal dans l'ensemble } \{x \in C \mid f(x) \leq y\}\}$$

On a donc :

$$\forall y \in g(C) : \underline{\max}\left(\{x \in C \mid f(x) \leq y\}\right) \subseteq \rho(C)$$

soit

$$\bigcup_{y \in g(C)} \underline{\max}\left(\{x \in C \mid f(x) \leq y\}\right) \subseteq \rho(C).$$

puisque $\rho(C) = \{m \in C \mid \rho(m) = m\}$.

- Pour la réciproque ($\Leftarrow$), on observe que pour tout $z \in C$, on a :

$$g \circ f(z) \leqslant g \circ f \circ \rho(z)$$

car ρ est extensive et g est croissante et f est continue au sens de Scott et donc croissante. On considère maintenant :

$$P = \{x \in C \mid f(x) \leqslant g(f(z))\}.$$

On a $f(z) \leq g(f(z))$ car g est extensive donc $z \in P$. D'après la question 7, il existe

$$z' \in \underline{\max}\left(\{x \in C \mid f(x) \leqslant g(f(z))\}\right)$$

tel que $z \leqslant z'$. D'après notre hypothèse

$$\forall y \in g(C) : \underline{\max}\left(\{x \in C \mid f(x) \leq y\}\right) \subseteq \rho(C)$$

on a $z' \in \rho(C)$ soit $\rho(z') = z'$. Il vient alors :

$\rho(z) \leq z'$ $\{$car $z \leq z'$ donc $\rho(z) \leq \rho(z') = z'\}$

$\Rightarrow f \circ \rho(z) \leq f(z')$ $\{f$ croissante$\}$

$\Rightarrow f \circ \rho(z) \leq g \circ f(z)$ $\{z' \in \underline{\max}(\{x \in C \mid f(x) \leq g(f(z))\})\}$

$\Rightarrow g \circ f \circ \rho(z) \leq g \circ g \circ f(z)$ $\{$monotonie$\}$

$\Rightarrow g \circ f \circ \rho(z) \leq g \circ f(z)$ $\{$idempotence$\}$

et donc $g \circ f(z) = g \circ f \circ \rho(z)$ par antisymétrie $\square$

<u>question 9</u>

On pose :

$$P = \{y \in C \mid \underline{\max}\ \{x \in C \mid f(x) \leq y\} \subseteq \rho(C)\}$$

et $\mathcal{M}(S) = \{\wedge Z \mid Z \subseteq S\}$

On montre que $\mathcal{M}(P) = P$ (c'est-à-dire que P est une famille de Moore).

— on a $\underline{\max}(\{x \in C \mid f(x) \leq \top\}) = \{\top\} \subseteq \rho(C)$ car $\rho(\top) = \top$ pour le supremum $\top$.

— Soit $Z \subseteq P$, non vide et $w = \wedge Z$. Soit $x \in \underline{\max}(\{x' \in C \mid f(x') \leq w\})$. on a

$$\forall z \in Z : w \leq z$$

donc $\{x' \in C \mid f(x') \leq w\} \subseteq \{x' \in C \mid f(x') \leq z\}$

donc $\{x' \in C \mid f(x') \leq w\} \subseteq \bigcap_{z \in Z} \{x' \in C \mid f(x') \leq z\}$

mais si $x' \in \bigcap_{z \in Z} \{x'' \in C \mid f(x'') \leq z\}$, on a

$\forall z \in Z : f(x') \leq z$ donc $f(x) \leq \bigwedge Z = w$ donc $f(x') \leq w$, ce qui démontre que

$$\{x' \in C \mid f(x') \leq w\} \supseteq \bigcap_{z \in Z} \{x' \in C \mid f(x') \leq z\}$$

et donc par antisymétrie que :

$$\{x' \in C \mid f(x') \leq w\} = \bigcap_{z \in Z} \{x' \in C \mid f(x') \leq z\}.$$

Comme $x \in \underline{\max} \{x' \in C \mid f(x') \leq w\} \subseteq \{x' \in C \mid f(x') \leq w\}$, il vient

$$x \in \bigcap_{z \in Z} \{x' \in C \mid f(x') \leq z\}$$

Par la question 7, pour tout $z \in Z$, il existe un $m_z \in \underline{\max} \{x' \in C \mid f(x') \leq z\}$ tel que $x \leq z$ et donc

$$x \leq \bigwedge_{z \in Z} m_z$$

D'autre part, pour tout $u \in Z$, on a

$$f\Big(\bigwedge_{z \in Z} m_z\Big) \leq f(m_u)$$

puisque f est croissante, et

$$m_u \in \underline{\max} \{x' \in C \mid f(x') \leq u\}$$

donc $f(m_u) \leq u$ par transitivité. De ce fait

$$f\Big(\bigwedge_{z \in Z} m_z\Big) \leq u$$

et donc par définition de $\bigwedge$, il vient :

$$f\Big(\bigwedge_{z \in Z} m_z\Big) \leq \bigwedge_{u \in Z} u = \bigwedge Z = w$$

Par conséquent

$$\bigwedge_{z\in Z} m_z \in \{x' \in C \mid f(x') \leq w\}$$

Comme $x \leq \bigwedge_{z\in Z} m_z$ et $x \in \underline{\max}(\{x \in C \mid f(x') \leq w\})$

il vient par maximalité que

$$x = \bigwedge_{z\in Z} m_z$$

Mais $\forall z \in Z \subseteq P$, on a :

$$\underline{\max}(\{x' \in C \mid f(x') \leq z\}) \subseteq \rho(C)$$

et donc $m_z \in \rho(C)$ car $m_z \in \underline{\max}(\{x' \in C \mid f(x') \leq z\})$.

Mais d'après Ward, $\rho(C)$ est clos par intersection et donc

$$x = \bigwedge_{z\in Z} m_z \in \rho(C)$$

soit $\underline{\max}\{x' \in C \mid f(x') \leq \wedge Z\} \subseteq \rho(C)$

donc $\wedge Z \in P$ et $\mathcal{M}(P) = P$. En prenant $\mathfrak{z}$ la fermeture supérieure dont les fermés sont P (qui existe et est unique d'après Ward),

on a $\mathfrak{z}(C) = \{y \in C \mid \underline{\max}(\{x \in C \mid f(x) \leq y\}) \subseteq \rho(C)\}$

$\square$

<u>question 10</u>

($\sqsubseteq$ est $\dot{\leq}$)

si $F_f(\rho) \dot{\leq} \mathfrak{I}$ alors

$\mathfrak{I}(C) \subseteq F_f(\rho)(C)$ 2 def. $\sqsubseteq$ $\mathcal{S}$

$\Leftrightarrow \mathfrak{I}(C) \subseteq \{y \in C \mid \underline{\max}(\{x \in C \mid f(x) \leq y\}) \subseteq \rho(C)\}$

$\Leftrightarrow \forall y \in \jmath(C) : \underline{\max}(\{x \in C \mid f(x) \leq y\}) \subseteq \rho(C)$

$\Leftrightarrow \bigcup_{y \in \jmath(C)} \underline{\max}(\{x \in C \mid f(x) \leq y\}) \subseteq \rho(C)$

$\Leftrightarrow$ d'après la question 8

$$\jmath \circ f = \jmath \circ f \circ \rho$$

$\square$

<u>question 11</u>

- Si $\rho \sqsubseteq \rho'$ alors $\rho'(C) \subseteq \rho(C)$ et donc
$$\{y \mid \underline{\max}(\{x \in C \mid f(x) \leq y\}) \subseteq \rho'(C)\}$$
$$\subseteq \{y \mid \underline{\max}(\{x \in C \mid f(x) \leq y\}) \subseteq \rho(C)\}$$
et donc, d'après la question 9,
$$\mathcal{F}_f(\rho) \dot{\leq} \mathcal{F}_f(\rho')$$
- Le sous-ensemble $\{\jmath \in \underline{uco}(C) \mid \rho \dot{\leq} \jmath\}$ est un treillis complet pour $\dot{\leq}$. Sur ce treillis, d'après Tarski, le plus petit point fixe de $\mathcal{F}_f$ existe. Sur $\underline{uco}(C)$, c'est le plus petit point fixe de $\mathcal{F}_f$ qui soit $\dot{\leq}$-supérieur ou égal à ρ. On peut donc poser
$$\jmath = \mathrm{lfp}_\rho^{\dot{\leq}} \mathcal{F}_f$$
qui est bien défini.

(1) Par définition on a donc $f \dot{\leq} g$

(2) Par définition de point fixe, on a :

$$g = \mathcal{F}_f(g)$$

soit

$$g(C) = \{y \in C \mid \underline{max}(\{x \in C \mid f(x) \leq y\}) \subseteq g(C)$$

$$\Rightarrow \forall y \in g(C) : \underline{max}(\{x \in C \mid f(x) \leq y\}) \subseteq g(C)$$

$$\Rightarrow \bigcup_{y \in g(C)} \underline{max}(\{x \in C \mid f(x) \leq y\}) \subseteq g(C)$$

$\Rightarrow$ (question 8, $\Leftarrow$)

$$g \circ f = g \circ f \circ g$$

(3) Si $g' \circ f \circ g' = g' \circ f$ et $g' \dot{\leq} f$, on a d'après la question 8, $\Rightarrow$ que :

$$\bigcup_{y \in g'(C)} \underline{max}(\{x \in C \mid f(x) \leq y\}) \subseteq g'(C)$$

donc

$$\forall y \in g'(C) : \underline{max}(\{x \in C \mid f(x) \leq y\}) \subseteq g'(C)$$

$$g'(C) \subseteq \{y \in C \mid \underline{max}(\{x \in C \mid f(x) \leq y\}) \subseteq g'(C)\}$$

$$\Rightarrow g'(C) \subseteq \mathcal{F}_f(g')(C)$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}_f(g') \dot{\leq} g' \wedge f \dot{\leq} g'$$

$$\Rightarrow g = \mathrm{lfp}_f^{\dot{\leq}} \mathcal{F}_f \dot{\leq} g' \text{ par Tarski.}$$

(4) on a $\gamma = \mathcal{F}_f \overset{\cdot}{\leq}_\rho \mathcal{F}_f$

$\Rightarrow \rho \overset{\cdot}{\leq} \gamma$

$\Rightarrow \mathcal{F}_f(\rho) \overset{\cdot}{\leq} \mathcal{F}_f(\gamma) = \gamma$

$\Rightarrow$ question 10 $\int$

$\gamma \circ f = \gamma \circ f \circ \rho$

$\square$

<u>question 12</u>

1°) $\forall \rho \in \underline{uco}(C)$, $\mathcal{F}_f(\rho) \in \underline{uco}(C)$ d'après la question 9.

2°) $G_f(\gamma)(C)$ est une famille de Moore donc $G_f(\gamma)$ est une fermeture supérieure

3°) Si $\xi \in \underline{uco}(C)$ et $S \subseteq C$ alors on a
$S \subseteq \xi(C) \Leftrightarrow \rho \leq \mathcal{M}(S)$

4°) $\rho \overset{\cdot}{\leq} G_f(\gamma)$

$\Leftrightarrow G_f(\gamma)(C) \subseteq \rho(C)$

$\Leftrightarrow \mathcal{M}\left(\bigcup_{y \in \gamma(C)} \underline{\max}\left(\{x \in C \mid f(x) \leq y\}\right)\right) \subseteq \rho(C)$

$\Leftrightarrow \bigcup_{y \in \gamma(C)} \underline{\max}\left(\{x \in C \mid f(x) \leq y\}\right) \subseteq \rho(C)$

car $X \subseteq \mathcal{M}(X)$ et $\mathcal{M}(\rho(C)) = \rho(C)$.

$\Leftrightarrow \forall y \in g(c) : \underline{\max}(\{x \in C \mid f(x) \leq y\}) \subseteq \rho(c)$

$\Leftrightarrow g(c) \subseteq \{y \in C' \mid \underline{\max}(\{x \in C \mid f(x) \leq y\}) \subseteq \rho(c)\}$

$\Leftrightarrow g(c) \subseteq \mathcal{F}_f(\rho)(c)$

$\Leftrightarrow \mathcal{F}_f(\rho) \dot{\leqslant} g$

ce qui correspond à la définition des correspondances de Galois. $\square$

<u>Question 13</u>

D'après la question 12, G_f est un opérateur croissant sur le treillis des fermetures $\langle \underline{uco}(C), \dot{\leqslant} \rangle$ et donc

$$gfp^{\dot{\leqslant}}_{\rho}\, G_f = \dot{\bigvee}\{\xi \dot{\leqslant} \rho \mid \xi \dot{\leqslant} G_f(\xi)\}$$

d'après Tarski. Il vient :

(1) $g \dot{\leqslant} \rho$ par définition de $gfp^{\dot{\leqslant}}_{\rho}\, G_f$.

(2) si $g = G_f(g)$

$\Rightarrow g \dot{\leqslant} G_f(g)$ {antisymétrie}

$\Rightarrow \mathcal{F}_f(g) \leqslant g$ {Correspondance de Galois}

$\Rightarrow g \circ f = g \circ f \circ g$ {question 10}

(3) si $g' \circ f = g' \circ f \circ g'$ et $g' \sqsubseteq \rho$

$\Rightarrow \mathcal{F}_\rho(g') \dot{\leq} g'$ et $g' \sqsubseteq \rho$ {question 10}

$\Rightarrow g' \dot{\leq} G_\rho(g')$ {question 12}

$\Rightarrow g' \dot{\leq} \bigvee \{\xi \in \underline{uco}(C) \mid \xi \dot{\leq} G_\rho(\xi)\}$ {Tarski}

$\Rightarrow g' \dot{\leq} \text{~~gfp~~} \text{gfp}_\rho^{\dot{\leq}} G_\rho$

$\Rightarrow g' \dot{\leq} g$

(4) $g \dot{\leq} \rho$

$\Rightarrow G_\rho(g) \dot{\leq} G_\rho(\rho)$ {monotonie}

$\Rightarrow g \dot{\leq} G_\rho(\rho)$ {point fixé}

$\Rightarrow \mathcal{F}_\rho(g) \dot{\leq} \rho$ {question 12}

$\Rightarrow g \circ f = g \circ f \circ \rho$ {question 10}

$\square$

<u>question 14</u>

Si l'on a l'equivalence

$$f(S) \subseteq T \Leftrightarrow f(\mu(S)) \subseteq T$$

il vient

$$\mu \circ f(S) = \bigcap_{f(S) \subseteq T} T = \bigcap_{f(\mu(S)) \subseteq T} T$$

car $f(S) \subseteq T \iff f(\mu(S)) \subseteq T$.

Reciproquement, si $\mu \circ f(S) = \mu \circ f(\mu(S))$ alors

$$f(S) \subseteq T \in \mu$$

$\Rightarrow \mu \circ f(S) \subseteq T$ car $T \in \mu$

$\Rightarrow \mu \circ f(\mu(S)) \subseteq T$ car $\mu \circ f(S) = \mu \circ f(\mu(S))$

$\Rightarrow f(\mu(S)) \subseteq T$ car μ est extensive, f croissante

$\square$

<u>question 15</u>

- $(\Leftarrow)$. Soit h satisfaisant l'hypothèse et définissons

$$h_{T,S}(X) = \begin{cases} h(X) & \text{si } X \not\supseteq T \\ S & \text{si } X \subseteq T \end{cases}$$

On a

$$f(h_{T,S}(X)) = f(h(X)) \subseteq X \text{ si}$$

$X \not\supseteq T$ et $f(h_{T,S}(X)) = f(S) \subseteq T \subseteq X$ si $X \supseteq T$. Par conséquent $\forall X \in \mathcal{P}(Q)$: $f(h_{T,S}(X)) \subseteq X$. Soit $h \sqsupseteq h_{T,S}$ maximal ayant cette propriété. On a $h(T) \supseteq S$. et $h \circ \mu = \mu \circ h \circ \mu$ et donc $h(T) \in \mu$ soit $h(T) \supseteq \mu(S)$. f est monotone et donc $f(\mu(S)) \subseteq f(h(T)) \subseteq S$ et on conclut par la question (14).

- ($\Rightarrow$). Reciproquement, on suppose $\mu \circ f = \mu \circ f \circ \mu$ et h maximale. Il faut prouver que si $T \in \mu$ alors $h(t) \in \mu$. On sait que $f(h(T)) \subseteq T$ et par hypothese $T \in \mu$. Il vient $f(\mu(h(T))) \subseteq T$. On definit h' tel que si $X \neq T$, $h'(X) = h(X)$ et $h'(T) = \mu(h(T))$. Donc pour tout $X \in \mathcal{P}(Q)$, $f(h'(X)) \subseteq X$ donc $h' \sqsupseteq h$ et $h' = h$. car h est maximale. Donc $h(T) = \mu(h(T)) \in \mu$.

$\square$