

# Résumés des interventions

Journées de Géométrie Algorithmique  
CIRM, Marseille–Luminy

8–12 mars 2010

Manifestation soutenue par



## 1 Résumés des cours

### Introduction à l'analyse et la géométrie non lisse

**Francis Clarke (Université Lyon 1)**

Il s'agit de motiver l'intérêt de considérer des fonctions et des ensembles non lisses dans différents contextes, et de développer un calcul différentiel associé à eux. On présente en survol les concepts principaux qui ont été utilisés avec succès dans les applications.

### Approximation adaptative et maillages anisotropes

**Albert Cohen (Université Paris 6)**

Ces exposés porteront sur des développements récents autour de l'approximation adaptative des données bidimensionnelles (telles que des images, ou des données d'élévation de terrain) par la mise au point de maillages anisotropes adaptés. On s'intéressera à la caractérisation géométrique du maillage optimal, ainsi qu'à des procédures de raffinement itératif permettant d'aboutir à de tels maillages.

### Programmation linéaire et semi-définie pour l'approximation

**Claire Mathieu (Brown University)**

La programmation linéaire est un outil puissant de l'algorithmique. La programmation semi-définie est encore plus puissante. Je présenterai des tentatives pour systématiquement renforcer un programme linéaire par ajout de contraintes et matrices positives semi-définies, avec applications dans la conception d'algorithmes d'approximation. Nous donnerons aussi des exemples d'utilisation de propriétés géométriques pour analyser des programmes semi-définis.

## Theoretically Guaranteed Mesh Generation—In Practice

Jonathan R. Shewchuk (University of California at Berkeley)

This short course is an introduction to triangular and tetrahedral mesh generation algorithms, especially those based on Delaunay triangulations. Coverage is restricted to algorithms that have two desirable qualities at once: they are mathematically guaranteed to generate high-quality meshes, and they work well enough in practice to compete with traditional, heuristic algorithms in engineering applications.

Topics covered include a short review of Delaunay triangulations and constrained Delaunay triangulations; extensive coverage of Delaunay refinement algorithms for triangular and tetrahedral mesh generation, including methods by Chew, Ruppert, Ungor, Boivin/Ollivier-Gooch, Miller/Walkington/Pav, and me; handling of 2D domains with curved boundaries; handling of 2D and 3D domains with small angles; sliver elimination; anisotropy; and the octree-based isosurface stuffing algorithm.

## Fonctions de Belyi : exemples, propriétés et applications

Alexander Zvonkin (LaBRI, Université Bordeaux 1)

La théorie des fonctions de Belyi et des « dessins d'enfants » est devenue fameuse car elle permet d'introduire une action du groupe de Galois universel sur les cartes combinatoires. Or, il existe un autre aspect de cette théorie, moins connu : les fonctions de Belyi constituent une source inépuisable d'exemples (et de contre-exemples) pour des domaines mathématiques très variés. À ce titre, on peut mentionner : la borne de Davenport-Stothers-Zannier, l'équation de Pell pour les polynômes (équation de Pell-Abel), la conjecture abc, les ensembles de Julia, le problème de moments pour les polynômes de Laurent, etc. Pendant ce cours on présentera, dans la limite du temps disponible, un certain nombre de ces applications.

## 2 Résumés des exposés

### Reconstruction certifiée de formes à l'aide d'unions de convexes

Dominique Attali (Gipsa-Lab, Grenoble)

Une façon simple de reconstruire une forme  $A \subset \mathbb{R}^N$  à partir d'un échantillon  $P$  consiste à retourner en sortie un  $r$ -offset de l'échantillon  $P+rB$ , où  $B = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \|x\| \leq 1\}$  désigne la boule euclidienne unité centrée en l'origine. Récemment, il a été prouvé que la sortie  $P+rB$  possède le même type d'homotopie que la forme  $A$ , pour un échantillon  $P$  de  $A$  suffisamment dense et pour une valeur convenable du paramètre  $r$  [1,2]. Dans cet exposé, nous étendons ce résultat et présentons une classe de convexes  $C \subset \mathbb{R}^N$ , tels que  $P+rC$  reconstruisent correctement la topologie de  $A$ . Cette classe de convexes, en plus de la boule euclidienne  $B$  inclut les cubes de dimension  $N$  de  $\mathbb{R}^N$ .

Travail réalisé en collaboration avec André Lieutier.

- [1] P. Niyogi, S. Smale, and S. Weinberger. Finding the Homology of Submanifolds with High Confidence from Random Samples. *Discrete Computational Geometry*, 39(1-3):419–441, 2008.
- [2] F. Chazal and A. Lieutier. Smooth Manifold Reconstruction from Noisy and Non Uniform Approximation with Guarantees. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 40:156–170, 2008.

### Évaluer des prédicats géométriques à l'aide d'invariants

Guillaume Batog (Équipe Vegas, Loria, Nancy)

En géométrie algorithmique, de nombreux algorithmes nécessitent de répondre de façon répétée à un même *prédicat* : étant donné un point du plan, est-il à gauche d'une droite donnée ? à l'intérieur d'un cercle

donné? Combien de droites coupent quatre droites données de l'espace? À travers ce dernier problème, nous présentons une méthode systématique d'évaluation polynomiale de prédicats géométriques fondée sur la théorie des invariants d'une action de groupe.

## Manifold Reconstruction using Tangential Delaunay Complexes

Jean-Daniel Boissonnat (Équipe Géométrica, Inria, Sophia-Antipolis)

We give a provably correct algorithm to reconstruct a  $k$ -dimensional manifold embedded in  $d$ -dimensional Euclidean space. Input to our algorithm is a point sample coming from an unknown manifold. Our approach is based on two main ideas : the notion of tangential Delaunay complex defined in [1, 2, 4], and the technique of sliver removal by weighting the sample points [3]. Differently from previous methods, we do not construct any subdivision of the embedding  $d$ -dimensional space. As a result, the running time of our algorithm depends only linearly on the extrinsic dimension  $d$  while it depends quadratically on the size of the input sample, and exponentially on the intrinsic dimension  $k$ . To the best of our knowledge, this is the first certified algorithm for manifold reconstruction whose complexity depends linearly on the ambient dimension. We also prove that for a dense enough sample the output of our algorithm is isotopic to the manifold and a close geometric approximation of the manifold.

This work was partially supported by the ANR project GAIA.

Joint work with Arijit Ghosh.

- [1] J-D. Boissonnat and J. Flötotto. A coordinate system associated with points scattered on a surface. *Journal of ACM*, 36:161–174, 2004.
- [2] J. Flötotto. *A coordinate system associated to a point cloud issued from a manifold: definition, properties and applications*. PhD thesis, Université of Nice Sophia-Antipolis, 2003.
- [3] S-W Cheng, T. K. Dey, H. Edelsbrunner, M. A. Facello, and S-H Teng. Sliver exudation. *Journal of ACM*, 47:883–904, 2000.
- [4] D. Freeman. Efficient simplicial reconstructions of manifolds from their samples. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 24, No. 10, 2002.

## Sélection de modèle pour l'approximation simpliciale

Claire Caillerie (Équipe Géométrica, Inria, Saclay)

Les complexes simpliciaux sont utilisés en géométrie algorithmique pour décrire une forme géométrique à partir de points d'observation échantillonnés sur celle-ci. Dans cet exposé, je présente tout d'abord un cadre statistique adapté à la question du choix d'un complexe simplicial parmi une famille donnée. Un critère de moindres carrés est défini pour choisir un complexe simplicial, et un résultat de sélection de modèle établit comment choisir le meilleur complexe de la collection, selon un point de vue statistique. Ce résultat fournit la forme de la pénalité et la méthode dite de l'heuristique de pente permet dans un second temps de calibrer cette pénalité à partir des données. Une étude expérimentale basée sur des données simulées et réelles illustrent l'utilisation de la méthode pour la sélection de complexes en petite dimension.

## Computing 3D Periodic Triangulations

Manuel Caroli (Équipe Géométrica, Inria, Sophia-Antipolis)

This work is motivated by the need for software computing 3D periodic triangulations in numerous domains including astronomy, material engineering, biomedical computing, fluid dynamics etc. We design

an algorithmic test to check whether a partition of the 3D flat torus into tetrahedra forms a triangulation (which subsumes that it is a simplicial complex). We propose an incremental algorithm that computes the Delaunay triangulation of a set of points in the 3D flat torus without duplicating any point, whenever possible; our algorithmic test detects when such a duplication can be avoided, which is usually possible in practical situations. Even in cases where point duplication is necessary, our algorithm always computes a triangulation that is homeomorphic to the flat torus. To the best of our knowledge, this is the first algorithm of this kind whose output is provably correct. The implementation will be released in CGAL.

## Sur les liens éventuels entre deux caractérisations des graphes planaires : de l'invariant de Y. Colin de Verdière aux forêts de Schnyder

Luca Castelli Aleardi (École Polytechnique, Palaiseau)

Dans cet exposé nous allons parler de deux résultats profonds, fournissant des caractérisations fines de la notion de planarité d'un graphe : elles sont célèbres et connues sous le nom de *forêts de Schnyder* et *invariant de Colin de Verdière*, respectivement.

Les forêts de Schnyder constituent une jolie structure combinatoire, dont l'appellation est due à W. Schnyder, qui l'introduisit sous le nom de *réalisateurs*, pour les liens étroits avec certaines propriétés des ordres partiels. L'une des premières applications conduit justement à un nouveau critère de planarité, qui peut s'exprimer en termes de dimension d'ordres partiels : un graphe est planaire si et seulement si l'ordre partiel d'incidence arêtes/sommets est au plus 3.

De nature complètement différente est l'invariant que Yves Colin de Verdière introduisit en 1990, pour caractériser la planarité d'un graphe en termes de propriétés spectrales. En gros, pour un graphe  $G$ , l'invariant  $\mu(G)$  peut se voir comme la multiplicité de la deuxième valeur propre d'une certaine *matrice Laplacienne* associée au graphe  $G$ . Il est alors possible d'établir le résultat fondamental suivant : un graphe est planaire, si et seulement si  $\mu(G) \leq 3$ .

Nous ne manquerons pas d'esquisser les propriétés géométriques que font des forêts de Schnyder et des matrices de Colin de Verdière deux outils fondamentaux dans le domaine du dessin des graphes. Ce qui motive, à notre avis, l'exploration des liens possibles entre ces deux jolies caractérisations.

## Plongement isométrique dans le plan rectilinéaire en temps optimal $O(n^2)$

Nicolas Catusse (LIF, Marseille)

Un espace métrique  $(X, d)$  admet un plongement isométrique dans un espace  $(Y, d')$  s'il existe une application  $\Phi$  de  $X \rightarrow Y$  telle que pour tout  $u, v \in X$ ,  $d(u, v) = d'(\Phi(u), \Phi(v))$ . Décider si un espace métrique est plongeable dans un autre espace métrique isométriquement ou avec un faible facteur de distorsion est une question classique en géométrie des distances et trouve certaines applications en informatique théorique, visualisation et analyse de donnée.

Nous nous intéressons ici au plongement isométrique d'un espace métrique dans le plan avec norme  $l_1$  (ou la norme  $l_\infty$  puisque dans le plan ces deux normes sont équivalentes). Bandelt et Chepoi (1996) ont montrés que le plongement isométrique dans le plan rectilinéaire peut être effectué si et seulement si tous les sous espace d'au plus 6 points peuvent l'être. Ce résultat implique que l'on peut décider ce problème en temps polynomial. Jeff Edmonds (2008) a donné un algorithme en  $O(n^2 \log^2 n)$  puis David Eppstein (2009) a donné un algorithme optimal en  $O(n^2)$ . Nous présentons un autre algorithme lui aussi en temps optimal  $O(n^2)$  mais avec une approche différente.

Cet algorithme utilise l'injectivité du plan avec la norme  $l_1$  et le concept d'enveloppe injective introduite par Isbell (1964) et Dress (1984) pour plonger une quadruplet de points qui va assurer une certaine rigidité permettant par la suite d'étendre le plongement à l'ensemble de l'espace métrique. Si l'espace métrique de départ est plongeable isométriquement l'algorithme renvoie un des plongements possibles, sinon il renvoie une réponse négative.

Travail réalisé en collaboration avec Victor Chepoi et Yann Vaxès.

## **Classification of 3D generic Morse tetrahedra and their Transitions: the Euclidean and Power Distance cases**

**Frédéric Cazals (Équipe ABS, Inria, Sophia-Antipolis)**

In 2D, there are two generic triangles, namely the acute and obtuse triangles, the transitional case being the right angle triangle. This classification can be phrased in terms of critical points of the Euclidean distance function to the vertices of the triangle. This point of view offers a strategy for investigating classifications and transitions in more general settings, and this paper is concerned with the 3D Euclidean and power distances cases.

In the Euclidean case, elaborating upon the classification of tetrahedra recently published, we establish the set of feasible transitions. Regarding the power distance, our results are twofold. First, we provide conjectures on the the classification of tetrahedra and the associated transitions. Second, we provide the algebraic specification of the classification problem, using an encoding of the tetrahedra based on edges' lengths. This latter contribution calls for future work in computational algebraic geometry so as to certify our conjectures, and might also allow one to extend our approach in higher dimension.

We expect these insights to find applications wherever the shape of simplices matters, for example in meshing and geometry processing.

Joint work with Nisarg Shah and Sushant Sachdeva.

## **Influence du bruit sur le nombre de points extrêmes**

**Olivier Devillers (Équipe Géométrica, Inria, Sophia-Antipolis)**

Si  $Y$  est une version bruitée d'un ensemble de points  $X$  en position convexe, quelle est la taille de l'enveloppe convexe de  $Y$ , c'est à dire quel est le nombre de points extrêmes de  $Y$ ? Nous considérons le cas où  $X$  est un  $(\varepsilon, \kappa)$ -échantillon de la sphère de  $R^d$  et où le bruit est aléatoire et uniforme:  $Y$  est obtenu en remplaçant chaque point  $x \in X$  par un point choisi aléatoirement dans une région  $P(x)$  de taille  $\delta$  au voisinage de  $x$ . Nous donnons des bornes inférieures et supérieures sur l'espérance du nombre de points extrêmes de  $Y$  lorsque  $P(x)$  est une boule (en toute dimension) ou un carré (dans le plan). Nos bornes dépendent de  $n$  la taille de  $X$  et de  $\delta$ . L'écart entre les bornes supérieurs et inférieures est réduit à un facteur polylogarithmique. Ces résultats peuvent s'étendre dans diverses directions (ensemble de points plus généraux, autre formes pour  $P(x)$ ...). Nous présentons également des résultats expérimentaux montrant que nos bornes pour un bruit aléatoire donnent une bonne estimation du comportement de l'arrondi de points sur une grille. Dans ce cas  $Y$  est obtenu en arrondissant chaque point de  $X$  au plus proche sommet d'une grille de pas  $\delta$ .

Travail réalisé en collaboration avec Dominique Attali et Xavier Goaoc.

Plus d'informations sur <http://hal.inria.fr/inria-00438409/>.

## **L'arbre des ensembles de niveau de courbure d'une surface. Application à la segmentation de surfaces maillées**

**Julie Digne (CMLA, ENS Cachan, CNRS, UniverSud)**

Nous présentons une nouvelle méthode d'extraction d'arêtes et de régions sur des surfaces 3D maillées. Pour ce faire, nous étendons un outil numérique et topologique qui a fait ses preuves en analyse des images digitales, l'arbre des ensembles de niveau. Pour toute fonction scalaire définie sur la surface maillée, un algorithme topologique rapide permet de construire l'arbre des ensembles de niveau de cette fonction. De cet arbre on peut extraire des ensembles de niveau significatifs par une extension de la fameuse méthode

MSER (*Maximally Stable Extremal Regions*) aux maillages. Mais quelle fonction scalaire utiliser ? La fonction intrinsèque la plus simple dont nous disposons est tout bonnement la courbure moyenne de la surface. Nous montrerons que la sélection MSER de ses lignes de niveau permet de segmenter la forme en régions à faible courbure séparées par des régions d'arêtes à forte courbure. Les premières expériences montrent que cette segmentation promet une simplification drastique de l'analyse géométrique des pièces industrielles.

- [1] J. Digne, J.-M. Morel, C. Mehdi-Souzani, and C. Lartigue, *Scale space meshing of raw data point sets*, preprint CMLA 2009-30 - ENS Cachan, October 2009.
- [2] J. Matas, O. Chum, M. Urban, and T. Pajdla, *Robust wide baseline stereo from maximally stable extremal regions*, In British Machine Vision Conference, vol. 1, 2002, pp. 384–393.
- [3] P. Monasse and F. Guichard, *Fast computation of a contrast-invariant image representation*, IEEE Trans. on Image Proc **9** (1998), 860–872.

## Multi-scale Analysis of Uncertain Data: the $\lambda$ -complex Filtration

Tom Dreyfus (Équipe ABS, Inria, Sophia-Antipolis)

The (weighted)  $\alpha$ -complex allows one to perform a multi-scale analysis of a collection of points (balls), in conjunction with a growth model encoded in Voronoi (power) diagrams.  $\alpha$ -complexes are thus associated to affine Voronoi diagrams, and have been instrumental in surface reconstruction, geometric inference, as well as molecular modeling.

This work is concerned with the 3D  $\lambda$ -complex, namely the equivalent of the  $\alpha$ -complex for an additively-multiplicatively weighted distance. Such a distance is associated with so-called compoundly weighted Voronoi diagrams, whose bissectors are degree four algebraic surfaces. We present the filtration associated with the  $\lambda$ -complex, together with the predicates required to compute it. Finally, we discuss an application to represent toleranced i.e. uncertain models in molecular modeling.

Joint work with Frédéric Cazals.

## Lines Pinning Lines

Xavier Goaoc (Équipe Vegas, Loria, Nancy)

A line  $\ell$  is a *transversal* to a family  $F$  of convex polytopes in  $\mathbb{R}^3$  if it intersects every member of  $F$ . If, in addition,  $\ell$  is an isolated point of the space of line transversals to  $F$ , we say that  $F$  is a *pinning* of  $\ell$ . We show that any minimal pinning of a line by polytopes in  $\mathbb{R}^3$  such that no face of a polytope is coplanar with the line has size at most eight. If in addition the polytopes are pairwise disjoint, then it has size at most six.

Joint work with Boris Aronov, Otfried Cheong, and Günter Rote.

## Variante de la décomposition de Voronoï paramétrée par une forme géométrique plane

Thomas Iwazsko (LMIA, Université de Haute Alsace, Mulhouse)

Dans le cadre d'une thèse portant sur la conception d'une structure de données nouvelle, son calcul et sa représentation par ordinateur, nous avons défini une variante de la décomposition de Voronoï [4].

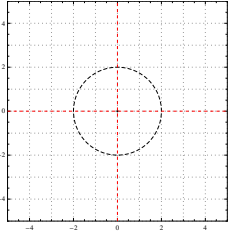
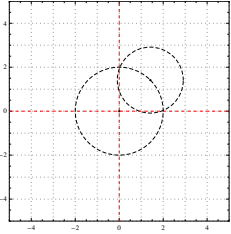
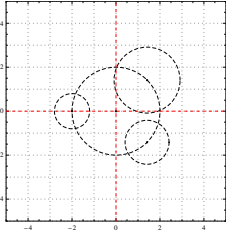
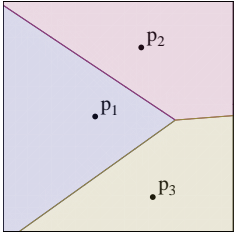
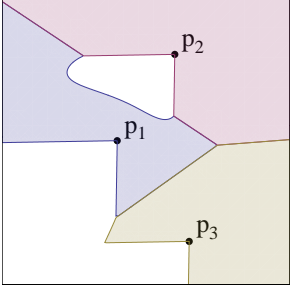
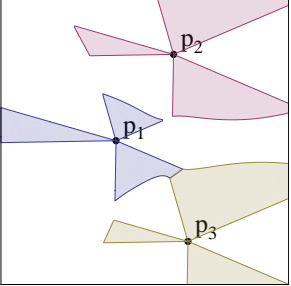
Dans cet exposé nous souhaitons présenter ladite définition et le modèle de forme géométrique plane utilisé, ainsi que leurs conséquences : diverses propriétés démontrées et illustrées.

Étant donné un ensemble de sites  $S$  et une forme plane  $M$ , nos travaux définissent un ensemble de régions du plan (une région par site, tout comme Voronoï) où chacune étend la propriété du disque vide (propre à toute cellule de Voronoï) à une « propriété de forme  $M$  vide ».  $M$  doit respecter certaines

contraintes mais celles-ci laissent une grande liberté de construction, notamment pour des formes non convexes.

L'intérêt théorique de ces travaux est de permettre, à terme :

- la conception d'algorithmes efficaces pour résoudre des problèmes du plan qui traitent de formes et d'informations de proximité
- de disposer d'une méthode générique pour résoudre des problèmes traités indépendamment jusqu'ici : Largest Empty xxx Among a Set of Points (avec xxx : rectangle / ellipsoïde / annulus [1-3] par exemple) , Piano Mover's Problem, Polygon Placement among Obstacles

 <p>La frontière d'une forme simple : un disque ouvert</p>	 <p>Les frontières des disques composant une forme <math>M_1</math></p>	 <p>Les frontières des disques composant une forme <math>M_2</math></p>
 <p>Régions « à disque vide » i.e. cellules de Voronoï</p>	 <p>Régions à instances <math>M_1</math> vides (instances adjacentes à <math>S</math>, i.e. un site de <math>S</math> sur leur frontière)</p>	 <p>Régions à instances <math>M_2</math> vides (instances adjacentes à <math>S</math>, i.e. un site de <math>S</math> sur leur frontière)</p>

En pratique des applications telles que : détection de motifs, planification de trajectoire, etc. sont envisageables.

Travail réalisé en collaboration avec Mahmoud Melkemi et Lhassane Idoumghar.

- [1] B. Chazelle, R.L. Drysdale and D.T. Lee, *Computing the largest empty rectangle*. SIAM J. Comput. 15, 1 (Feb. 1986), 300-315.
- [2] R.A. Dwyer and W.F. Eddy, *Maximal empty ellipsoids*. In Proceedings of the Fifth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (Jan. 1994).
- [3] J.M. Díaz, F. Hurtado, H. Meijer, D. Rappaport and J. Sellarès, *The Largest Empty Annulus Problem*, International Journal of Computational Geometry and Applications, Vol. 13 No. 4, pp. 317-325, August 2003.
- [4] T. Iwazsko, M. Melkemi and L. Idoumghar, *Regions of Empty Overlapping Circles*. Abstracts from the 7th Japan Conference on Computational Geometry and Graphs (JCCGG 2009), to appear, available at <http://www.jaist.ac.jp/~uehara/JCCGG09/>.

## Cyclides de Dupin et surfaces canal particulières

Rémi Langevin (Université de Bourgogne, Dijon)

Les cyclides de Dupin et les surfaces canal sont souvent utilisées pour joindre des sphères ou des surfaces qui se rencontrent transversalement.

Le but de l'exposé est de montrer d'abord qu'étudier (classer) les cyclides de Dupin revient à étudier les plans affines de l'espace de Lorentz de dimension 5 :  $\mathbb{R}_1^4$ . L'objet clé est l'espace des sphères orientées vu comme la quadrique de  $\mathbb{R}_1^4$  d'équation  $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ . Nous montrerons ensuite que la famille de surfaces canal associées à une courbe contenue dans un sous-espace de dimension 3 de  $\mathbb{R}_1^4$ , donc dans une quadrique de dimension 2 de ce sous-espace, est la famille des images par une homographie d'un cône (sur une courbe de la sphère  $\mathbb{S}^2$ ), d'un cylindre (courbe plane  $\times \mathbb{R}$ ) ou d'une surface de révolution. Par ailleurs, nous montrerons pourquoi pour « fermer » un canal avec une calotte sphérique ou un point, il faut accepter un point singulier de la courbe tracée dans l'espace des sphères.

## Calcul d'un cycle non-contractile minimal sur une surface combinatoire

Francis Lazarus (Gipsa-Lab, Grenoble)

Soit  $G$  un graphe de taille  $n$  cellulièrement plongé dans une surface  $S$  de genre  $g$ . Soit  $k$  le nombre minimal d'arêtes de tout cycle de  $G$  non-contractile dans  $S$ . Le nombre  $k$ , parfois appelé *largeur en arêtes* (edge-width), est un paramètre important du plongement de  $G$ ; plus  $k$  est grand, plus  $G$  partage des propriétés avec les graphes planaires. Je décrirai un algorithme simple de complexité  $O(gnk)$  pour calculer un cycle non-contractile de taille minimale  $k$  dans  $G$ .

Travail réalisé en collaboration avec Sergio Cabello et Éric Colin de Verdière.

## Optimal reconstruction problem may be hard

André Lieutier (Dassault Systèmes, Aix-en-Provence)

Sampling conditions for recovering the homology of a set using topological persistence are much weaker than sampling conditions required by any known algorithm for producing a topologically correct reconstruction. Under the former sampling conditions which we call *weak sampling conditions*, we give an algorithm that outputs a topologically correct reconstruction. Unfortunately, even though the algorithm terminates, its time complexity is unbounded. Motivated by the question of knowing if a polynomial time algorithm for reconstruction exists under the weak sampling conditions, we identify at the heart of our algorithm a test which requires answering the following question: given two 2-dimensional simplicial complexes  $L \subset K$ , does there exist a simplicial complex containing  $L$  and contained in  $K$  which realizes the persistent homology of  $L$  into  $K$ ? We call this problem the *homological simplification* of the pair  $(K, L)$  and prove that this problem is NP-complete, using a reduction from 3SAT.

Travail réalisé en collaboration avec Dominique Attali.

## Self-Adapting Point Location

Pedro Machado Manhães de Castro (Équipe Géométrica, Inria Sophia-Antipolis)

Point location in spatial subdivision is one of the most studied problems in computational geometry. In the case of triangulations of  $\mathbb{R}^d$ , we revisit the problem to exploit a possible coherence between the query-points. For a single query, walking in the triangulation is a classical strategy with good practical behavior and expected complexity  $O(n^{1/d})$  if the points are evenly distributed. For a batch of query-points, the main idea is to use previous queries to improve the current one; we compare various strategies that have an influence on the constant hidden in the big- $O$  notation. Still regarding the complexity of a query,



we show how the Delaunay hierarchy can be used to answer, under some hypotheses, a query  $q$  with a  $O(\log \#(pq))$  randomized expected complexity, where  $\#(.)$  indicates the number of simplices crossed by the line  $pq$ , and  $p$  is a previously located query. The data structure has  $O(n \log n)$  construction complexity and  $O(n)$  memory complexity.

## Sur la frontière d'un nuage de points

**Yvan Maillot (Université de Haute Alsace, Mulhouse)**

La forme d'un nuage de points est naturelle pour l'œil humain mais difficile à définir précisément. Au début des années 80, Edelsbrunner, Kirkpatrick et Seidel définirent les  $\alpha$ -shapes, une généralisation de l'enveloppe convexe, offrant ainsi le support scientifique pour raisonner sur ce que pourrait être la « forme » d'un nuage de points. Les  $\alpha$ -shapes fournissent une définition précise et formelle de la forme d'un nuage de points pour une valeur de  $\alpha$ . La variation de cette valeur sur  $\mathbb{R}$  engendre une famille monotone de formes de la plus grossière (le plan) à la plus fine (le nuage de points) en passant par son enveloppe convexe.

Les  $\alpha$ -shapes furent à l'origine d'une quantité considérable de résultats de recherche notamment dans le domaine de la reconstruction de surface à partir de nuages de points. Toutefois une de leurs principales lacunes, que chacun a palliée à sa manière, réside dans l'incapacité à fournir une forme « acceptable » quand les points du nuage ne sont pas uniformément répartis. De récents papiers notamment en fouille de données (data mining) montrent l'intérêt grandissant de définir la frontière d'un ensemble de données spatiales ou même de dimensions supérieures afin d'établir des « clusters » dont les contours ne sont pas nécessairement convexes, même en présence d'un ensemble de données « désorganisé » et « bruité ».

Nous proposons une variante des  $\alpha$ -shapes qui pourrait être un outil d'aide au raisonnement sur la « forme » d'un nuage de points non nécessairement uniforme. Cette approche donne une interprétation précise et naturelle de la frontière d'un nuage de points dont la répartition varie par endroits selon, a priori, le niveau de détail requis. Il s'agit d'une filtration du complexe de Delaunay d'un ensemble de points en dimension quelconque, appelée « Locally-Density-Adaptive- $\alpha$ -shape » ou « LDA- $\alpha$ -shape », qui tient compte de la densité locale des points. Nous montrons que la variation de  $\alpha$  de 0 à 1 engendre une famille monotone de sous-complexes de Delaunay de sa forme la plus grossière (l'enveloppe convexe) à sa forme la plus fine (le nuage de points).

## Test de contractibilité d'un lacet tracé sur une surface combinatoire

**Julien Rivaud (Gipsa-Lab, Grenoble)**

Dans un article de 1999, T. Dey et S. Guha proposent un algorithme pour tester si deux lacets tracés sur une surface combinatoire sont (librement) homotopes en temps linéaire en la taille de la surface et des deux lacets. Je commencerai par montrer en quoi la méthode proposée ne fonctionne pas ; puis je présenterai une solution pour la question plus simple de contractibilité d'un lacet, en m'inspirant d'un article d'É. Colin de Verdière et J. Erickson sur les raccourcissements de lacets.

## Mousses généralisées et leur évolution

**Nicolas Rivier (IPCMS, Université de Strasbourg)**

Une mousse est une partition de l'espace  $R^3$  en cellules bordées par des interfaces, qui sont des circuits irréductibles. C'est donc un ensemble gradué d'éléments topologiques, sommets, arêtes, interfaces et cellules, muni de relations d'incidence et de bord. Une mousse physique évolue au cours du temps, de la mousse de savon qui mûrit à la structure de l'univers aux grandes échelles issue de fluctuations primordiales de densité de matière.

Une mousse qui évolue peut être obtenue simplement en généralisant la construction de Voronoi à des sphères (Laguerre-Telley). Mais cette construction impose, entre autres, une incidence minimale de deux cellules sur une interface, ce qui est trop restrictif.

La structure du diamant est une mousse, dont les circuits irréductibles sont des "chaises" de 6 arêtes. Il lui correspond un pavage archimédien de tétraèdres (autour des sommets) et de tétraèdres tronqués (cellules) en proportion 1:1, dont les sommets se trouvent au milieu des arêtes de la structure diamant, et on peut associer à ses éléments topologiques des points critiques de Morse.

On désordonne cette mousse par répétition de transformations topologiques élémentaires (*www-flip*, ou *T1* généralisé à 3D). La structure reste une mousse, mais les circuits irréductibles sont modifiés; on y trouve notamment des *bateaux torsés*, et des circuits de 7 qui *chevauchent* (sur lesquels trois cellules sont incidentes). Pour ces derniers, trois points critiques de Morse fusionnent en un point critique cubique de type *selle pour singe*. On discutera aussi de l'évolution topologique de cette mousse et de son entropie.

Travail réalisé en collaboration avec Christophe Oguey.

## Soft Clustering and Persistent Homology

### Primož Skraba (Équipe Géométrica, Saclay)

Persistent homology has emerged as one of the most important tools in topological data analysis. Recent results on the stability of the persistence diagram, describing the appearance and disappearance of topological features, allow us to investigate the behavior of a function on an underlying space with only mild assumptions and a finite point-sample. First, we apply these results to the problem of clustering data sampled from some underlying distribution. Under the appropriate conditions, we can provably recover the correct number of clusters as well as show some spatial stability. Combining these results, we obtain a topological soft-clustering algorithm. The algorithm can be multiple times with perturbations to the data set to obtain a series of clusterings. The theoretical results guarantee that we can find the cluster correspondances between runs. We present several possible algorithms arising from this general scheme and show preliminary results under various types of perturbations.