

Théorie et algorithmes pour les éléments finis anisotropes

Albert Cohen

Laboratoire Jacques-Louis Lions
Université Pierre et Marie Curie
Paris

avec Nira Dyn, Frédéric Hecht et Jean-Marie Mirebeau

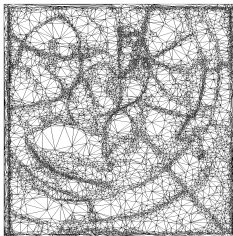
CIRM, Mars 2010

Triangulations optimales pour l'approximation par éléments finis

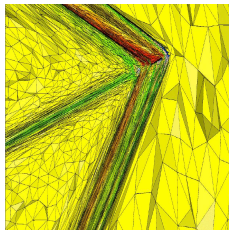
Objectif : étant donné une fonction f et $N > 0$, construire une triangulation \mathcal{T}_N de N triangles minimisant l'erreur (L^p) entre f et l'espace d'éléments finis (\mathbb{P}_1) sur \mathcal{T}_N .



Image numérique



Triangulation (P. Frey)



Choc (C. Dobrzynski)

Triangulation optimisée : raffinement **anisotrope** près des contours.

La recherche de la triangulation optimale est un problème **NP-complet**.

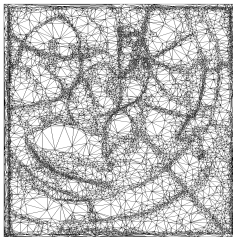
Objectif : construire \mathcal{T}_N telle que l'erreur d'approximation se comporte comme l'erreur pour la triangulation optimale quand $N \rightarrow +\infty$.

Triangulations optimales pour l'approximation par éléments finis

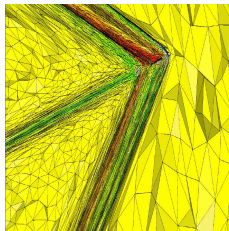
Objectif : étant donné une fonction f et $N > 0$, construire une triangulation \mathcal{T}_N de N triangles minimisant l'erreur (L^p) entre f et l'espace d'éléments finis (\mathbb{P}_1) sur \mathcal{T}_N .



Image numérique



Triangulation (P. Frey)



Choc (C. Dobrzynski)

Triangulation optimisée : raffinement **anisotrope** près des contours.

La recherche de la triangulation optimale est un problème **NP-complet**.

Objectif : construire \mathcal{T}_N telle que l'erreur d'approximation se comporte comme l'erreur pour la triangulation optimale quand $N \rightarrow +\infty$.

Questions

1. Caractérisation du maillage optimal ?
2. Estimation de l'erreur d'approximation pour un tel maillage ?
3. Algorithmes pour construire des maillages optimaux ?

L'erreur d'approximation en éléments finis \mathbb{P}_1

Soit \mathcal{T}_h une triangulation, avec

$$h := \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T, \quad h_T := \text{diam}(T).$$

et V_h est l'espace d'éléments finis \mathbb{P}_1 associé. Erreur d'approximation locale

$$e_T(f)_p := \inf_{\pi \in \Pi_1} \|f - \pi\|_{L^p(T)} \quad \text{ou} \quad \|f - I_T f\|_{L^p(T)} \quad \text{ou} \quad \|f - P_T f\|_{L^p(T)},$$

où I_T est l'interpolant sur T et P_T le projecteur $L^2(T)$ -orthogonal.

Si f est suffisamment régulière, on a

$$e_T(f)_p \leq Ch_T^2 \|d^2 f\|_{L^p(T)},$$

où C est indépendante de f et T . Estimation d'erreur globale :

$$\inf_{f_h \in V_h} \|f - f_h\|_{L^p} \leq Ch^2 \|d^2 f\|_{L^p}.$$

Si $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ est une famille de triangulations régulières et quasi-uniformes

$$|T| \geq ch^2, \quad T \in \mathcal{T}_h, \quad h > 0.$$

Nombre de triangles $N = \#(\mathcal{T}_h) \sim h^{-2}$ On a donc

$$\|f - f_N\|_{L^p} \leq CN^{-1} \|d^2 f\|_{L^p},$$

où f_N désigne l'approximation de f dans V_h .

L'erreur d'approximation en éléments finis \mathbb{P}_1

Soit \mathcal{T}_h une triangulation, avec

$$h := \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T, \quad h_T := \text{diam}(T).$$

et V_h est l'espace d'éléments finis \mathbb{P}_1 associé. Erreur d'approximation locale

$$e_T(f)_p := \inf_{\pi \in \Pi_1} \|f - \pi\|_{L^p(T)} \quad \text{ou} \quad \|f - I_T f\|_{L^p(T)} \quad \text{ou} \quad \|f - P_T f\|_{L^p(T)},$$

où I_T est l'interpolant sur T et P_T le projecteur $L^2(T)$ -orthogonal.

Si f est suffisamment régulière, on a

$$e_T(f)_p \leq Ch_T^2 \|d^2 f\|_{L^p(T)},$$

où C est indépendante de f et T . Estimation d'erreur globale :

$$\inf_{f_h \in V_h} \|f - f_h\|_{L^p} \leq Ch^2 \|d^2 f\|_{L^p}.$$

Si $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ est une famille de triangulations régulières et quasi-uniformes

$$|T| \geq ch^2, \quad T \in \mathcal{T}_h, \quad h > 0.$$

Nombre de triangles $N = \#(\mathcal{T}_h) \sim h^{-2}$ On a donc

$$\|f - f_N\|_{L^p} \leq CN^{-1} \|d^2 f\|_{L^p},$$

où f_N désigne l'approximation de f dans V_h .

L'erreur d'approximation en éléments finis \mathbb{P}_1

Soit \mathcal{T}_h une triangulation, avec

$$h := \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T, \quad h_T := \text{diam}(T).$$

et V_h est l'espace d'éléments finis \mathbb{P}_1 associé. Erreur d'approximation locale

$$e_T(f)_p := \inf_{\pi \in \Pi_1} \|f - \pi\|_{L^p(T)} \quad \text{ou} \quad \|f - I_T f\|_{L^p(T)} \quad \text{ou} \quad \|f - P_T f\|_{L^p(T)},$$

où I_T est l'interpolant sur T et P_T le projecteur $L^2(T)$ -orthogonal.

Si f est suffisamment régulière, on a

$$e_T(f)_p \leq Ch_T^2 \|d^2 f\|_{L^p(T)},$$

où C est indépendante de f et T . Estimation d'erreur globale :

$$\inf_{f_h \in V_h} \|f - f_h\|_{L^p} \leq Ch^2 \|d^2 f\|_{L^p}.$$

Si $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ est une famille de triangulations régulières et **quasi-uniformes**

$$|T| \geq ch^2, \quad T \in \mathcal{T}_h, \quad h > 0.$$

Nombre de triangles $N = \#(\mathcal{T}_h) \sim h^{-2}$ On a donc

$$\|f - f_N\|_{L^p} \leq CN^{-1} \|d^2 f\|_{L^p},$$

où f_N désigne l'approximation de f dans V_h .

L'erreur d'approximation en éléments finis \mathbb{P}_1

Soit \mathcal{T}_h une triangulation, avec

$$h := \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T, \quad h_T := \text{diam}(T).$$

et V_h est l'espace d'éléments finis \mathbb{P}_1 associé. Erreur d'approximation locale

$$e_T(f)_p := \inf_{\pi \in \Pi_1} \|f - \pi\|_{L^p(T)} \quad \text{ou} \quad \|f - I_T f\|_{L^p(T)} \quad \text{ou} \quad \|f - P_T f\|_{L^p(T)},$$

où I_T est l'interpolant sur T et P_T le projecteur $L^2(T)$ -orthogonal.

Si f est suffisamment régulière, on a

$$e_T(f)_p \leq Ch_T^2 \|d^2 f\|_{L^p(T)},$$

où C est indépendante de f et T . Estimation d'erreur globale :

$$\inf_{f_h \in V_h} \|f - f_h\|_{L^p} \leq Ch^2 \|d^2 f\|_{L^p}.$$

Si $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ est une famille de triangulations régulières et **quasi-uniformes**

$$|T| \geq ch^2, \quad T \in \mathcal{T}_h, \quad h > 0.$$

Nombre de triangles $N = \#(\mathcal{T}_h) \sim h^{-2}$ On a donc

$$\|f - f_N\|_{L^p} \leq CN^{-1} \|d^2 f\|_{L^p},$$

où f_N désigne l'approximation de f dans V_h .

Éléments finis adaptatifs isotropes

Question : comment l'estimation en $N^{-1} \|d^2 f\|_{L^p}$ s'améliore-t-elle si on utilise des triangulations mieux adaptées à f ?

On considère des triangulations \mathcal{T} non-uniformes, mais régulières :

$$|T| \geq ch_T^2, \quad T \in \mathcal{T}.$$

Equivalent à une restriction $\theta_{\min}(T) \geq \theta^* > 0$ (triangles isotropes).

On part de l'estimation de l'erreur d'approximation locale

$$e_T(f)_p \leq Ch_T^2 \|d^2 f\|_{L^p(T)},$$

avec $h_T := \text{diam}(T)$. En utilisant $h_T^2 \leq c^{-1}|T|$, on obtient

$$e_T(f)_p \leq C|T| \|d^2 f\|_{L^p(T)},$$

Argument heuristique : on néglige les variations au troisième ordre de f en supposant $d^2 f$ constant sur T ce qui donne

$$e_T(f)_p \leq C \|d^2 f\|_{L^\tau(T)}, \quad \frac{1}{\tau} := \frac{1}{p} + 1.$$

Éléments finis adaptatifs isotropes

Question : comment l'estimation en $N^{-1} \|d^2 f\|_{L^p}$ s'améliore-t-elle si on utilise des triangulations mieux adaptées à f ?

On considère des triangulations \mathcal{T} non-uniformes, mais régulières :

$$|T| \geq ch_T^2, \quad T \in \mathcal{T}.$$

Equivalent à une restriction $\theta_{\min}(T) \geq \theta^* > 0$ (triangles isotropes).

On part de l'estimation de l'erreur d'approximation locale

$$e_T(f)_p \leq Ch_T^2 \|d^2 f\|_{L^p(T)},$$

avec $h_T := \text{diam}(T)$. En utilisant $h_T^2 \leq c^{-1}|T|$, on obtient

$$e_T(f)_p \leq C|T| \|d^2 f\|_{L^p(T)},$$

Argument heuristique : on néglige les variations au troisième ordre de f en supposant $d^2 f$ constant sur T ce qui donne

$$e_T(f)_p \leq C \|d^2 f\|_{L^\tau(T)}, \quad \frac{1}{\tau} := \frac{1}{p} + 1.$$

Éléments finis adaptatifs isotropes

Question : comment l'estimation en $N^{-1} \|d^2 f\|_{L^p}$ s'améliore-t-elle si on utilise des triangulations mieux adaptées à f ?

On considère des triangulations \mathcal{T} non-uniformes, mais régulières :

$$|T| \geq ch_T^2, \quad T \in \mathcal{T}.$$

Equivalent à une restriction $\theta_{\min}(T) \geq \theta^* > 0$ (triangles isotropes).

On part de l'estimation de l'erreur d'approximation locale

$$e_T(f)_p \leq Ch_T^2 \|d^2 f\|_{L^p(T)},$$

avec $h_T := \text{diam}(T)$. En utilisant $h_T^2 \leq c^{-1}|T|$, on obtient

$$e_T(f)_p \leq C|T| \|d^2 f\|_{L^p(T)},$$

Argument heuristique : on néglige les variations au troisième ordre de f en supposant $d^2 f$ constant sur T ce qui donne

$$e_T(f)_p \leq C \|d^2 f\|_{L^\tau(T)}, \quad \frac{1}{\tau} := \frac{1}{p} + 1.$$

Éléments finis adaptatifs isotropes

Question : comment l'estimation en $N^{-1}\|d^2f\|_{L^p}$ s'améliore-t-elle si on utilise des triangulations mieux adaptées à f ?

On considère des triangulations \mathcal{T} non-uniformes, mais régulières :

$$|T| \geq ch_T^2, \quad T \in \mathcal{T}.$$

Equivalent à une restriction $\theta_{\min}(T) \geq \theta^* > 0$ (triangles isotropes).

On part de l'estimation de l'erreur d'approximation locale

$$e_T(f)_p \leq Ch_T^2 \|d^2f\|_{L^p(T)},$$

avec $h_T := \text{diam}(T)$. En utilisant $h_T^2 \leq c^{-1}|T|$, on obtient

$$e_T(f)_p \leq C|T| \|d^2f\|_{L^p(T)},$$

Argument heuristique : on néglige les variations au troisième ordre de f en supposant d^2f **constant** sur T ce qui donne

$$e_T(f)_p \leq C \|d^2f\|_{L^\tau(T)}, \quad \frac{1}{\tau} := \frac{1}{p} + 1.$$

Equidistribution de l'erreur

Supposons que \mathcal{T}_N **équidistribue** l'erreur :

$$e_T(f)_p = \varepsilon, \quad T \in \mathcal{T}_N,$$

En définissant l'approximation par $f_N := I_T f$ ou $P_T f$ sur chaque $T \in \mathcal{T}_N$, a alors

$$\|f - f_N\|_{L^p} = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_N} e_T(f)_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq N^{\frac{1}{p}} \varepsilon.$$

D'autre part, puisque $e_T(f)_p \leq C \|d^2 f\|_{L^\tau(T)}$ avec $\frac{1}{\tau} := \frac{1}{p} + 1$, on a

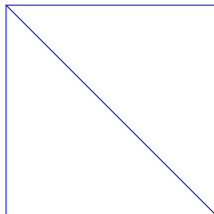
$$N \varepsilon^\tau \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_N} e_T(f)_p^\tau \leq C^\tau \sum_{T \in \mathcal{T}_N} \|d^2 f\|_{L^\tau(T)}^\tau \leq C^\tau \|d^2 f\|_{L^\tau}^\tau,$$

d'où $\varepsilon \leq CN^{-\frac{1}{\tau}} \|d^2 f\|_{L^\tau}$. Finalement

$$\|f - f_N\|_{L^p} \leq CN^{-1} \|d^2 f\|_{L^\tau}, \quad \frac{1}{\tau} := \frac{1}{p} + 1.$$

La vitesse d'approximation N^{-1} est gouvernée par une condition de régularité plus faible ($\tau < p$).

Un algorithme hiérarchique pour équidistribuer l'erreur



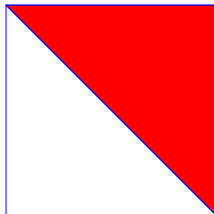
Triangulation grossière \Rightarrow selection du triangle maximisant $e_T(f)_p \Rightarrow$ bisection du plus long côté \Rightarrow on itère ... jusqu'au nombre N ou à la précision souhaitée \Rightarrow raffinement conforme.

L'erreur n'est pas exactement équidistribuée mais on peut prouver

$$\|f - f_N\|_{L^p} \leq CN^{-1} \|d^2 f\|_{L^\tau},$$

pour tout τ tel que $\frac{1}{\tau} > \frac{1}{p} + 1$.

Un algorithme hiérarchique pour équidistribuer l'erreur



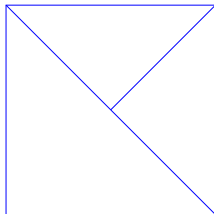
Triangulation grossière \Rightarrow sélection du triangle maximisant $e_T(f)_p \Rightarrow$ bisection du plus long côté \Rightarrow on itère ... jusqu'au nombre N ou à la précision souhaitée \Rightarrow raffinement conforme.

L'erreur n'est pas exactement équidistribuée mais on peut prouver

$$\|f - f_N\|_{L^p} \leq CN^{-1} \|d^2 f\|_{L^\tau},$$

pour tout τ tel que $\frac{1}{\tau} > \frac{1}{p} + 1$.

Un algorithme hiérarchique pour équilibrer l'erreur



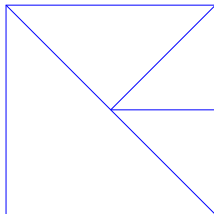
Triangulation grossière \Rightarrow sélection du triangle maximisant $e_T(f)_p \Rightarrow$ bisection du plus long côté \Rightarrow on itère ... jusqu'au nombre N ou à la précision souhaitée \Rightarrow raffinement conforme.

L'erreur n'est pas exactement équilibrée mais on peut prouver

$$\|f - f_N\|_{L^p} \leq CN^{-1} \|d^2 f\|_{L^\tau},$$

pour tout τ tel que $\frac{1}{\tau} > \frac{1}{p} + 1$.

Un algorithme hiérarchique pour équidistribuer l'erreur



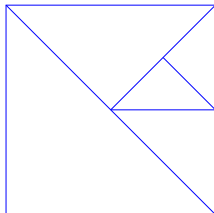
Triangulation grossière \Rightarrow sélection du triangle maximisant $e_T(f)_p \Rightarrow$ bisection du plus long côté \Rightarrow on itère ... jusqu'au nombre N ou à la précision souhaitée \Rightarrow raffinement conforme.

L'erreur n'est pas exactement équidistribuée mais on peut prouver

$$\|f - f_N\|_{L^p} \leq CN^{-1} \|d^2 f\|_{L^\tau},$$

pour tout τ tel que $\frac{1}{\tau} > \frac{1}{p} + 1$.

Un algorithme hiérarchique pour équidistribuer l'erreur



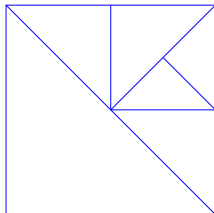
Triangulation grossière \Rightarrow sélection du triangle maximisant $e_T(f)_p \Rightarrow$ bisection du plus long côté \Rightarrow on itère ... jusqu'au nombre N ou à la précision souhaitée \Rightarrow raffinement conforme.

L'erreur n'est pas exactement équidistribuée mais on peut prouver

$$\|f - f_N\|_{L^p} \leq CN^{-1} \|d^2 f\|_{L^\tau},$$

pour tout τ tel que $\frac{1}{\tau} > \frac{1}{p} + 1$.

Un algorithme hiérarchique pour équilibrer l'erreur



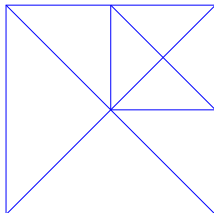
Triangulation grossière \Rightarrow sélection du triangle maximisant $e_T(f)_p \Rightarrow$ bisection du plus long côté \Rightarrow on itère ... jusqu'au nombre N ou à la précision souhaitée \Rightarrow raffinement conforme.

L'erreur n'est pas exactement équilibrée mais on peut prouver

$$\|f - f_N\|_{L^p} \leq CN^{-1} \|d^2 f\|_{L^\tau},$$

pour tout τ tel que $\frac{1}{\tau} > \frac{1}{p} + 1$.

Un algorithme hiérarchique pour équidistribuer l'erreur



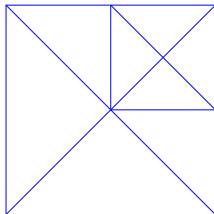
Triangulation grossière \Rightarrow sélection du triangle maximisant $e_T(f)_p \Rightarrow$ bisection du plus long côté \Rightarrow on itère ... jusqu'au nombre N ou à la précision souhaitée \Rightarrow raffinement conforme.

L'erreur n'est pas exactement équidistribuée mais on peut prouver

$$\|f - f_N\|_{L^p} \leq CN^{-1} \|d^2 f\|_{L^\tau},$$

pour tout τ tel que $\frac{1}{\tau} > \frac{1}{p} + 1$.

Un algorithme hiérarchique pour équidistribuer l'erreur



Triangulation grossière \Rightarrow sélection du triangle maximisant $e_T(f)_p \Rightarrow$ bisection du plus long côté \Rightarrow on itère ... jusqu'au nombre N ou à la précision souhaitée \Rightarrow raffinement conforme.

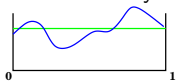
L'erreur n'est pas exactement équidistribuée mais on peut prouver

$$\|f - f_N\|_{L^p} \leq CN^{-1} \|d^2 f\|_{L^\tau},$$

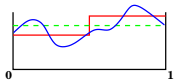
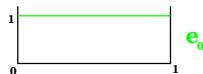
pour tout τ tel que $\frac{1}{\tau} > \frac{1}{p} + 1$.

Représentations multiéchelles dans des bases d'ondelettes

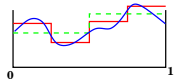
Exemple élémentaire : le système de Haar



$$\mathbf{f} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{e}_0 \rangle \mathbf{e}_0$$



$$+ \langle \mathbf{f}, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1$$



$$+ \langle \mathbf{f}, \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2 + \langle \mathbf{f}, \mathbf{e}_3 \rangle \mathbf{e}_3$$

$$\dots = \sum_{\lambda} \langle \mathbf{f}, \psi_{\lambda} \rangle \psi_{\lambda}$$

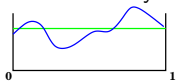
$$\mathbf{f}_{\lambda} := \langle \mathbf{f}, \psi_{\lambda} \rangle$$

Ondelettes : $\psi_{\lambda} = \psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^j \cdot -k)$ avec $\lambda = (j, k)$.

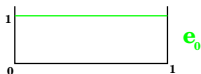
Ondelettes plus générales : construites à partir de procédés d'approximation multiéchelle similaires, utilisant des fonctions polynomiales par morceaux, splines ou éléments finis.

Représentations multiéchelles dans des bases d'ondelettes

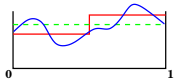
Exemple élémentaire : le système de Haar



$$\mathbf{f} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{e}_0 \rangle \mathbf{e}_0$$



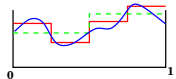
\mathbf{e}_0



$$+ \langle \mathbf{f}, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1$$



\mathbf{e}_1



$$+ \langle \mathbf{f}, \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2 + \langle \mathbf{f}, \mathbf{e}_3 \rangle \mathbf{e}_3$$

$$\dots = \sum_{\lambda} \mathbf{f}_{\lambda} \psi_{\lambda}$$

$$\mathbf{f}_{\lambda} := \langle \mathbf{f}, \psi_{\lambda} \rangle$$

Ondelettes : $\psi_{\lambda} = \psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^j \cdot -k)$ avec $\lambda = (j, k)$.

Ondelettes plus générales : construites à partir de procédés d'approximation multiéchelle similaires, utilisant des fonctions polynomiales par morceaux, splines ou éléments finis.

Application aux images numériques

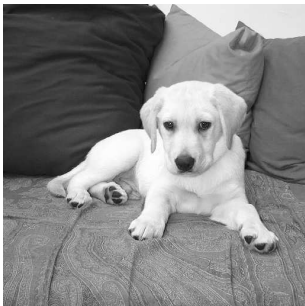
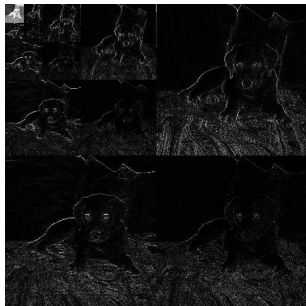


Image Digitale 512x512



Décomposition multiéchelle

Les représentations multiéchelles des images naturelles sont **creuses** : un petit nombre de coefficients numériquement significatifs concentrent l'essentiel de l'énergie et de l'information.

Application à la compression des images



Idée de base : on ne code avec précision que les coefficients numériquement significatifs

⇒ La résolution s'adapte localement

Exemple : codage de 1 % des coefficients



Standard de compression **JPEG 2000** :

- Mêmes principes de base
- Utilise des ondelettes biorthogonales plus lisses (Daubechies, Feauveau, AC)
- Bonne qualité avec compression de 1/40

Eléments finis adaptatifs anisotropes

Objectif : équidistribution de l'erreur avec des triangles de **forme optimale**.

On suppose à nouveau d^2f constant sur T , i.e. f quadratique sur T .

Si (λ_1, λ_2) sont les valeurs propres de d^2f , et (h_1, h_2) sont les dimensions de T dans les directions propres, l'erreur locale satisfait une estimation du type

$$e_T(f)_\rho \leq \frac{1}{2} |T|^{1/\rho} (|\lambda_1| h_1^2 + |\lambda_2| h_2^2).$$

Triangle optimal : les deux contributions sont du même ordre (équilateral dans la métrique induite par d^2f), d'o'u

$$e_T(f)_\rho \leq |T|^{1/\rho} h_1 h_2 \sqrt{|\lambda_1 \lambda_2|} \sim |T|^{1+1/\rho} \sqrt{|\lambda_1 \lambda_2|} = \|\sqrt{|\det(d^2f)|}\|_{L^\tau(T)},$$

avec $\frac{1}{\tau} := \frac{1}{\rho} + 1$.

En supposant que \mathcal{T}_N équadistribue l'erreur, on obtient ainsi

$$\|f - f_N\|_{L^p} \leq N^{-1} \|\sqrt{|\det(d^2f)|}\|_{L^\tau}, \quad \frac{1}{\tau} := \frac{1}{\rho} + 1.$$

Éléments finis adaptatifs anisotropes

Objectif : équidistribution de l'erreur avec des triangles de **forme optimale**.

On suppose à nouveau d^2f constant sur T , i.e. f quadratique sur T .

Si (λ_1, λ_2) sont les valeurs propres de d^2f , et (h_1, h_2) sont les dimensions de T dans les directions propres, l'erreur locale satisfait une estimation du type

$$e_T(f)_p \leq \frac{1}{2} |T|^{1/p} (|\lambda_1| h_1^2 + |\lambda_2| h_2^2).$$

Triangle optimal : les deux contributions sont du même ordre (équilateral dans la métrique induite par d^2f), d'o'u

$$e_T(f)_p \leq |T|^{1/p} h_1 h_2 \sqrt{|\lambda_1 \lambda_2|} \sim |T|^{1+1/p} \sqrt{|\lambda_1 \lambda_2|} = \|\sqrt{|\det(d^2f)|}\|_{L^\tau(T)},$$

avec $\frac{1}{\tau} := \frac{1}{p} + 1$.

En supposant que \mathcal{T}_N équadistribue l'erreur, on obtient ainsi

$$\|f - f_N\|_{L^p} \leq N^{-1} \|\sqrt{|\det(d^2f)|}\|_{L^\tau}, \quad \frac{1}{\tau} := \frac{1}{p} + 1.$$

Eléments finis adaptatifs anisotropes

Objectif : équidistribution de l'erreur avec des triangles de **forme optimale**.

On suppose à nouveau d^2f constant sur T , i.e. f quadratique sur T .

Si (λ_1, λ_2) sont les valeurs propres de d^2f , et (h_1, h_2) sont les dimensions de T dans les directions propres, l'erreur locale satisfait une estimation du type

$$e_T(f)_p \leq \frac{1}{2} |T|^{1/p} (|\lambda_1| h_1^2 + |\lambda_2| h_2^2).$$

Triangle optimal : les deux contributions sont du même ordre (équilateral dans la métrique induite par d^2f), d'o'u

$$e_T(f)_p \leq |T|^{1/p} h_1 h_2 \sqrt{|\lambda_1 \lambda_2|} \sim |T|^{1+1/p} \sqrt{|\lambda_1 \lambda_2|} = \|\sqrt{|\det(d^2f)|}\|_{L^\tau(T)},$$

avec $\frac{1}{\tau} := \frac{1}{p} + 1$.

En supposant que \mathcal{T}_N équadistribue l'erreur, on obtient ainsi

$$\|f - f_N\|_{L^p} \leq N^{-1} \|\sqrt{|\det(d^2f)|}\|_{L^\tau}, \quad \frac{1}{\tau} := \frac{1}{p} + 1.$$

Eléments finis adaptatifs anisotropes

Objectif : équidistribution de l'erreur avec des triangles de **forme optimale**.

On suppose à nouveau d^2f constant sur T , i.e. f quadratique sur T .

Si (λ_1, λ_2) sont les valeurs propres de d^2f , et (h_1, h_2) sont les dimensions de T dans les directions propres, l'erreur locale satisfait une estimation du type

$$e_T(f)_p \leq \frac{1}{2} |T|^{1/p} (|\lambda_1| h_1^2 + |\lambda_2| h_2^2).$$

Triangle optimal : les deux contributions sont du même ordre (équilateral dans la métrique induite par d^2f), d'où

$$e_T(f)_p \leq |T|^{1/p} h_1 h_2 \sqrt{|\lambda_1 \lambda_2|} \sim |T|^{1+1/p} \sqrt{|\lambda_1 \lambda_2|} = \|\sqrt{|\det(d^2f)|}\|_{L^\tau(T)},$$

avec $\frac{1}{\tau} := \frac{1}{p} + 1$.

En supposant que \mathcal{T}_N équadistribue l'erreur, on obtient ainsi

$$\|f - f_N\|_{L^p} \leq N^{-1} \|\sqrt{|\det(d^2f)|}\|_{L^\tau}, \quad \frac{1}{\tau} := \frac{1}{p} + 1.$$

Optimisation de forme

Pour $q \in \Pi_2$, on note \mathbf{q} la forme quadratique donnée par sa partie homogène de degré 2 et Q la matrice symétrique associée. On a

$$e_T(q)_p = e_T(\mathbf{q})_p.$$

On note $\det(\mathbf{q}) = \det(Q)$ et $|\mathbf{q}|$ la forme quadratique positive associée à $|Q|$ (valeur absolue au sens des matrices symétriques).

Problème : pour un triangle de taille $|T|$ donnée, quelle forme minimise l'erreur ?

Par changement d'échelle, on se ramène à étudier

$$K(\mathbf{q}) = \inf_{|T|=1} e_T(\mathbf{q})_p.$$

On a alors $\inf_{|T|=A} e_T(\mathbf{q})_p = A^{1+1/p} K(\mathbf{q}) = A^{1/\tau} K(\mathbf{q})$ et le triangle minimisant d'aire A est obtenu par homothétie. Un triangle optimalement adapté à \mathbf{q} vérifie

$$e_T(\mathbf{q})_p = |T|^{1/\tau} K(\mathbf{q}) = \|K(\mathbf{q})\|_{L^\tau(T)}.$$

Un triangle est non dégénéré pour \mathbf{q} si $\rho_{\mathbf{q}}(T) := \frac{e_T(\mathbf{q})_p}{|T|^{1/\tau} K(\mathbf{q})}$ est proche de 1.

Optimisation de forme

Pour $q \in \Pi_2$, on note \mathbf{q} la forme quadratique donnée par sa partie homogène de degré 2 et Q la matrice symétrique associée. On a

$$e_T(q)_p = e_T(\mathbf{q})_p.$$

On note $\det(\mathbf{q}) = \det(Q)$ et $|\mathbf{q}|$ la forme quadratique positive associée à $|Q|$ (valeur absolue au sens des matrices symétriques).

Problème : pour un triangle de taille $|T|$ donnée, quelle forme minimise l'erreur ?

Par changement d'échelle, on se ramène à étudier

$$K(\mathbf{q}) = \inf_{|T|=1} e_T(\mathbf{q})_p.$$

On a alors $\inf_{|T|=A} e_T(\mathbf{q})_p = A^{1+1/p} K(\mathbf{q}) = A^{1/\tau} K(\mathbf{q})$ et le triangle minimisant d'aire A est obtenu par homothétie. Un triangle optimalement adapté à \mathbf{q} vérifie

$$e_T(\mathbf{q})_p = |T|^{1/\tau} K(\mathbf{q}) = \|K(\mathbf{q})\|_{L^\tau(T)}.$$

Un triangle est non dégénéré pour \mathbf{q} si $\rho_{\mathbf{q}}(T) := \frac{e_T(\mathbf{q})_p}{|T|^{1/\tau} K(\mathbf{q})}$ est proche de 1.

Optimisation de forme

Pour $q \in \Pi_2$, on note \mathbf{q} la forme quadratique donnée par sa partie homogène de degré 2 et Q la matrice symétrique associée. On a

$$e_T(q)_p = e_T(\mathbf{q})_p.$$

On note $\det(\mathbf{q}) = \det(Q)$ et $|\mathbf{q}|$ la forme quadratique positive associée à $|Q|$ (valeur absolue au sens des matrices symétriques).

Problème : pour un triangle de taille $|T|$ donnée, quelle forme minimise l'erreur ?

Par changement d'échelle, on se ramène à étudier

$$K(\mathbf{q}) = \inf_{|T|=1} e_T(\mathbf{q})_p.$$

On a alors $\inf_{|T|=A} e_T(\mathbf{q})_p = A^{1+1/p} K(\mathbf{q}) = A^{1/\tau} K(\mathbf{q})$ et le triangle minimisant d'aire A est obtenu par homothétie. Un triangle optimalement adapté à \mathbf{q} vérifie

$$e_T(\mathbf{q})_p = |T|^{1/\tau} K(\mathbf{q}) = \|K(\mathbf{q})\|_{L^\tau(T)}.$$

Un triangle est non dégénéré pour \mathbf{q} si $\rho_{\mathbf{q}}(T) := \frac{e_T(\mathbf{q})_p}{|T|^{1/\tau} K(\mathbf{q})}$ est proche de 1.

Description des triangles adaptés à \mathbf{q}

Invariance affine : toute transformation linéaire inversible ϕ on a $e_{\phi(T)}(\mathbf{q})_p = |\det(\phi)|^{1/p} e_T(\mathbf{q} \circ \phi)_p$, ce qui entraîne

$$K(\mathbf{q}) = K(\mathbf{q} \circ \phi) |\det(\phi)|^{-1} = \kappa \sqrt{|\det(\mathbf{q})|},$$

avec $\kappa = K(x^2 + y^2)$ si $\det(\mathbf{q}) > 0$ et $\kappa = K(x^2 - y^2)$ si $\det(\mathbf{q}) < 0$.

1) $\mathbf{q} = x^2 + y^2$: les triangles optimaux sont équilatéraux. Pour une forme quadratique positive ou négative \mathbf{q} quelconque ($\det(\mathbf{q}) > 0$), valeur atteinte par les triangles équilatéraux pour la métrique

$$|u|_{\mathbf{q}} := \sqrt{|\mathbf{q}(u)|}.$$

Les triangles non dégénérés sont isotropes pour cette métrique.

2) $\mathbf{q} = x^2 - y^2$: les triangles équilatéraux sont optimaux, ainsi que leurs images par transformation linéaire de valeurs propres $(t, \frac{1}{t})$ et vecteurs propres $(1, 1)$ et $(-1, 1)$ pour tout $t \neq 0$. Pour une forme quadratique de signe mixte quelconque ($\det(\mathbf{q}) < 0$), les triangles isotropes pour la métrique $|u|_{|\mathbf{q}|} := \sqrt{|\mathbf{q}(u)|}$ sont non-dégénérés pour \mathbf{q} , ainsi que tout ceux obtenus par transformation linéaire de valeurs propres $(t, \frac{1}{t})$ et vecteurs propres (u, v) sur le cône nul $\mathbf{q}(u) = \mathbf{q}(v) = 0$.

Description des triangles adaptés à \mathbf{q}

Invariance affine : toute transformation linéaire inversible ϕ on a $e_{\phi(T)}(\mathbf{q})_p = |\det(\phi)|^{1/p} e_T(\mathbf{q} \circ \phi)_p$, ce qui entraîne

$$K(\mathbf{q}) = K(\mathbf{q} \circ \phi) |\det(\phi)|^{-1} = \kappa \sqrt{|\det(\mathbf{q})|},$$

avec $\kappa = K(x^2 + y^2)$ si $\det(\mathbf{q}) > 0$ et $\kappa = K(x^2 - y^2)$ si $\det(\mathbf{q}) < 0$.

1) $\mathbf{q} = x^2 + y^2$: les triangles optimaux sont équilatéraux. Pour une forme quadratique positive ou négative \mathbf{q} quelconque ($\det(\mathbf{q}) > 0$), valeur atteinte par les triangles équilatéraux pour la métrique

$$|u|_{\mathbf{q}} := \sqrt{|\mathbf{q}(u)|}.$$

Les triangles non dégénérés sont isotropes pour cette métrique.

2) $\mathbf{q} = x^2 - y^2$: les triangles équilatéraux sont optimaux, ainsi que leurs images par transformation linéaire de valeurs propres $(t, \frac{1}{t})$ et vecteurs propres $(1, 1)$ et $(-1, 1)$ pour tout $t \neq 0$. Pour une forme quadratique de signe mixte quelconque ($\det(\mathbf{q}) < 0$), les triangles isotropes pour la métrique $|u|_{|\mathbf{q}|} := \sqrt{|\mathbf{q}(u)|}$ sont non-dégénérés pour \mathbf{q} , ainsi que tout ceux obtenus par transformation linéaire de valeurs propres $(t, \frac{1}{t})$ et vecteurs propres (u, v) sur le cône nul $\mathbf{q}(u) = \mathbf{q}(v) = 0$.

Description des triangles adaptés à \mathbf{q}

Invariance affine : toute transformation linéaire inversible ϕ on a $e_{\phi(T)}(\mathbf{q})_p = |\det(\phi)|^{1/p} e_T(\mathbf{q} \circ \phi)_p$, ce qui entraîne

$$K(\mathbf{q}) = K(\mathbf{q} \circ \phi) |\det(\phi)|^{-1} = \kappa \sqrt{|\det(\mathbf{q})|},$$

avec $\kappa = K(x^2 + y^2)$ si $\det(\mathbf{q}) > 0$ et $\kappa = K(x^2 - y^2)$ si $\det(\mathbf{q}) < 0$.

1) $\mathbf{q} = x^2 + y^2$: les triangles optimaux sont équilatéraux. Pour une forme quadratique positive ou négative \mathbf{q} quelconque ($\det(\mathbf{q}) > 0$), valeur atteinte par les triangles équilatéraux pour la métrique

$$|u|_{\mathbf{q}} := \sqrt{|\mathbf{q}(u)|}.$$

Les triangles non dégénérés sont isotropes pour cette métrique.

2) $\mathbf{q} = x^2 - y^2$: les triangles équilatéraux sont optimaux, ainsi que leurs images par transformation linéaire de valeurs propres $(t, \frac{1}{t})$ et vecteurs propres $(1, 1)$ et $(-1, 1)$ pour tout $t \neq 0$. Pour une forme quadratique de signe mixte quelconque ($\det(\mathbf{q}) < 0$), les triangles isotropes pour la métrique $|u|_{\mathbf{q}} := \sqrt{|\mathbf{q}(u)|}$ sont non-dégénérés pour \mathbf{q} , ainsi que tout ceux obtenus par transformation linéaire de valeurs propres $(t, \frac{1}{t})$ et vecteurs propres (u, v) sur le cône nul $\mathbf{q}(u) = \mathbf{q}(v) = 0$.

Triangulations adaptée à f

Si $\rho_{\mathbf{q}}(T) = 1$ pour tout $T \in \mathcal{T}_N$ avec $\mathbf{q} = \frac{d^2 f}{2}$ sur T , on a alors

$$e_T(f)_p = \|K(\mathbf{q})\|_{L^\tau(T)} = \|K\left(\frac{d^2 f}{2}\right)\|_{L^\tau(T)}.$$

En supposant que \mathcal{T}_N équadistribue l'erreur, on obtient

$$\|f - f_N\|_{L^p} \leq N^{-1} \|K\left(\frac{d^2 f}{2}\right)\|_{L^\tau} \leq CN^{-1} \|\sqrt{|\det(d^2 f)|}\|_{L^\tau}, \quad \frac{1}{\tau} := \frac{1}{p} + 1.$$

Estimation incorrecte : $\det(d^2 f) = 0$ n'entraîne pas $\|f - f_N\|_{L^p} = 0$.

Estimations rigoureuses établies par Chen-Sun-Xu et Babenko pour " N assez grand", et qui peuvent se formuler :

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} N \|f - f_N\|_{L^p} \leq C \|\sqrt{|\det(d^2 f)|}\|_{L^\tau}.$$

Remarque : la quantité $A(f) := \|\sqrt{|\det(d^2 f)|}\|_{L^\tau}$ n'est pas une semi-norme et ne vérifie pas $A(f + g) \leq C(A(f) + A(g))$.

Triangulations adaptée à f

Si $\rho_{\mathbf{q}}(T) = 1$ pour tout $T \in \mathcal{T}_N$ avec $\mathbf{q} = \frac{d^2 f}{2}$ sur T , on a alors

$$e_T(f)_p = \|K(\mathbf{q})\|_{L^\tau(T)} = \|K\left(\frac{d^2 f}{2}\right)\|_{L^\tau(T)}.$$

En supposant que \mathcal{T}_N équadistribue l'erreur, on obtient

$$\|f - f_N\|_{L^p} \leq N^{-1} \|K\left(\frac{d^2 f}{2}\right)\|_{L^\tau} \leq CN^{-1} \|\sqrt{|\det(d^2 f)|}\|_{L^\tau}, \quad \frac{1}{\tau} := \frac{1}{p} + 1.$$

Estimation incorrecte : $\det(d^2 f) = 0$ n'entraîne pas $\|f - f_N\|_{L^p} = 0$.

Estimations rigoureuses établies par Chen-Sun-Xu et Babenko pour " N assez grand", et qui peuvent se formuler :

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} N \|f - f_N\|_{L^p} \leq C \|\sqrt{|\det(d^2 f)|}\|_{L^\tau}.$$

Remarque : la quantité $A(f) := \|\sqrt{|\det(d^2 f)|}\|_{L^\tau}$ n'est pas une semi-norme et ne vérifie pas $A(f + g) \leq C(A(f) + A(g))$.

Triangulations adaptée à f

Si $\rho_{\mathbf{q}}(T) = 1$ pour tout $T \in \mathcal{T}_N$ avec $\mathbf{q} = \frac{d^2 f}{2}$ sur T , on a alors

$$e_T(f)_p = \|K(\mathbf{q})\|_{L^\tau(T)} = \|K\left(\frac{d^2 f}{2}\right)\|_{L^\tau(T)}.$$

En supposant que \mathcal{T}_N équadistribue l'erreur, on obtient

$$\|f - f_N\|_{L^p} \leq N^{-1} \|K\left(\frac{d^2 f}{2}\right)\|_{L^\tau} \leq CN^{-1} \|\sqrt{|\det(d^2 f)|}\|_{L^\tau}, \quad \frac{1}{\tau} := \frac{1}{p} + 1.$$

Estimation incorrecte : $\det(d^2 f) = 0$ n'entraîne pas $\|f - f_N\|_{L^p} = 0$.

Estimations rigoureuses établies par Chen-Sun-Xu et Babenko pour “ N assez grand”, et qui peuvent se formuler :

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} N \|f - f_N\|_{L^p} \leq C \|\sqrt{|\det(d^2 f)|}\|_{L^\tau}.$$

Remarque : la quantité $A(f) := \|\sqrt{|\det(d^2 f)|}\|_{L^\tau}$ n'est pas une semi-norme et ne vérifie pas $A(f + g) \leq C(A(f) + A(g))$.

Métrieque optimale

L'application $x \mapsto |d^2f(x)| \in S_2^+$ définit une métrique riemannienne. Les triangles T de formes optimisées doivent être (presque) équilatéraux pour cette métrique lorsque $x \in T$. L'aire de tels triangles dans cette métrique est

$$A(T) \approx |T| \sqrt{|\det(d^2f)(x)|}.$$

Equidistribution de l'erreur : pour tout T et $x \in T$:

$$\text{Const} \approx |T|^{1/\tau} \sqrt{|\det(d^2f)(x)|} = \left(A(T) |\det(d^2f)(x)|^r \right)^{1/\tau}, \quad r = \frac{\tau - 1}{2} = \frac{1}{2(p+1)}.$$

Les triangles de \mathcal{T}_N sont donc (presque) unitaires pour une métrique

$$x \mapsto \mathcal{M}(x) = h(x) |d^2f(x)|, \quad h(x) = h |\det(d^2f)(x)|^{r/2},$$

où $h > 0$ détermine la résolution.

Approche classique en maillage : construire une triangulation \mathcal{T}_N où chaque triangle T est (presque) unitaire pour une métrique $\mathcal{M}(x)$ donnée. Exemples : BAMG (FreeFEM), MMG3D.

Preuves rigoureuses de propriétés optimales du maillage : Boissonat, Shewchuk.

Métrieque optimale

L'application $x \mapsto |d^2f(x)| \in \mathcal{S}_2^+$ définit une métrieque riemannienne. Les triangles T de formes optimisées doivent être (presque) équilatéraux pour cette métrieque lorsque $x \in T$. L'aire de tels triangles dans cette métrieque est

$$A(T) \approx |T| \sqrt{|\det(d^2f)(x)|}.$$

Equidistribution de l'erreur : pour tout T et $x \in T$:

$$\text{Const} \approx |T|^{1/\tau} \sqrt{|\det(d^2f)(x)|} = \left(A(T) |\det(d^2f)(x)|^r \right)^{1/\tau}, \quad r = \frac{\tau - 1}{2} = \frac{1}{2(p + 1)}.$$

Les triangles de \mathcal{T}_N sont donc (presque) unitaires pour une métrieque

$$x \mapsto \mathcal{M}(x) = h(x) |d^2f(x)|, \quad h(x) = h |\det(d^2f)(x)|^{r/2},$$

où $h > 0$ détermine la résolution.

Approche classique en maillage : construire une triangulation \mathcal{T}_N où chaque triangle T est (presque) unitaire pour une métrieque $\mathcal{M}(x)$ donnée. Exemples : BAMG (FreeFEM), MMG3D.

Preuves rigoureuses de propriétés optimales du maillage : Boissonat, Shewchuk.

Théorie générale (Mirebeau, Constructive Approximation 2010)

On considère l'approximation par éléments \mathbb{P}_{m-1} . Soit $H_m[X, Y]$ l'espace des polynôme homogènes de deux variables de degré m . Pour tout $\mathbf{q} \in H_m[X, Y]$ on définit :

$$K_m(\mathbf{q}) := \min_{|\mathcal{T}|=1} e_{\mathcal{T}}(\mathbf{q})_p.$$

On a alors

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} N^{\frac{m}{2}} \inf_{\#\mathcal{T}_N \leq N} \|f - f_N\|_{L^p} \leq \|K_m(\frac{d^m f}{m!})\|_{L^\tau}, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{1}{p} + \frac{m}{2}.$$

Résultat optimal : pour toute famille $(\mathcal{T}_N)_{N>0}$ de triangulation telle que

$$\max_{N>0} N^{1/2} \max_{T \in \mathcal{T}_N} h_T < +\infty,$$

on a

$$\liminf_{N \rightarrow +\infty} N^{\frac{m}{2}} \|f - f_N\|_{L^p} \geq \|K_m(\frac{d^m f}{m!})\|_{L^\tau}$$

Important : la métrique optimale $x \mapsto \mathcal{M}_m(x)$ dépend de m .

Théorie générale (Mirebeau, Constructive Approximation 2010)

On considère l'approximation par éléments \mathbb{P}_{m-1} . Soit $H_m[X, Y]$ l'espace des polynôme homogènes de deux variables de degré m . Pour tout $\mathbf{q} \in H_m[X, Y]$ on définit :

$$K_m(\mathbf{q}) := \min_{|\mathcal{T}|=1} e_{\mathcal{T}}(\mathbf{q})_{\rho}.$$

On a alors

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} N^{\frac{m}{2}} \inf_{\#\mathcal{T}_N \leq N} \|f - f_N\|_{L^p} \leq \|K_m(\frac{d^m f}{m!})\|_{L^{\tau}}, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{1}{p} + \frac{m}{2}.$$

Résultat optimal : pour toute famille $(\mathcal{T}_N)_{N>0}$ de triangulation telle que

$$\max_{N>0} N^{1/2} \max_{T \in \mathcal{T}_N} h_T < +\infty,$$

on a

$$\liminf_{N \rightarrow +\infty} N^{\frac{m}{2}} \|f - f_N\|_{L^p} \geq \|K_m(\frac{d^m f}{m!})\|_{L^{\tau}}$$

Important : la métrique optimale $x \mapsto \mathcal{M}_m(x)$ dépend de m .

Expressions de K_m et de \mathcal{M}_m

Dans le cas des éléments \mathbb{P}_1 on a

$$K_2(\mathbf{q}) = \kappa \sqrt{|\det(\mathbf{q})|}, \quad \kappa = \kappa(\text{sign}(\det(\mathbf{q}))),$$

et la métrique optimale de la forme $\mathcal{M}_2(x) = h(x)|d^2f|(x)$.

Dans le cas des éléments \mathbb{P}_2 on trouve

$$K_3(\mathbf{q}) = \kappa |\text{disc}(\mathbf{q})|^{\frac{1}{4}}, \quad \kappa = \kappa(\text{sign}(\text{disc}(\mathbf{q}))),$$

avec $\text{disc}(ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3) := b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d + 18abcd - 27a^2d^2$.

La métrique optimale $x \mapsto \mathcal{M}_3(x)$ se calcule explicitement à partir de matrices dépendant des coefficients (a, b, c, d) associés à $d^3f(x)$.

Éléments \mathbb{P}_m pour $m > 3$: pas d'expression explicite de K_m , mais il existe des équivalents polynomiaux (en les coefficients de \mathbf{q}), pas d'expression explicite de la mesure \mathcal{M}_m , calculable par des techniques d'optimisation (Cao).

Extension en dimension $d > 2$ (simplexes) : $K_2(\mathbf{q}) = \kappa |\det(\mathbf{q})|^{1/d}$ et $\mathcal{M}_2(x) = h(x)|d^2f|(x)$, expression explicite connue pour $d = m = 3$.

Expressions de K_m et de \mathcal{M}_m

Dans le cas des éléments \mathbb{P}_1 on a

$$K_2(\mathbf{q}) = \kappa \sqrt{|\det(\mathbf{q})|}, \quad \kappa = \kappa(\text{sign}(\det(\mathbf{q}))),$$

et la métrique optimale de la forme $\mathcal{M}_2(x) = h(x)|d^2f|(x)$.

Dans le cas des éléments \mathbb{P}_2 on trouve

$$K_3(\mathbf{q}) = \kappa |\text{disc}(\mathbf{q})|^{\frac{1}{4}}, \quad \kappa = \kappa(\text{sign}(\text{disc}(\mathbf{q}))),$$

avec $\text{disc}(ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3) := b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d + 18abcd - 27a^2d^2$.

La métrique optimale $x \mapsto \mathcal{M}_3(x)$ se calcule explicitement à partir de matrices dépendant des coefficients (a, b, c, d) associés à $d^3f(x)$.

Éléments \mathbb{P}_m pour $m > 3$: pas d'expression explicite de K_m , mais il existe des équivalents polynomiaux (en les coefficients de \mathbf{q}), pas d'expression explicite de la mesure \mathcal{M}_m , calculable par des techniques d'optimisation (Cao).

Extension en dimension $d > 2$ (simplexes) : $K_2(\mathbf{q}) = \kappa |\det(\mathbf{q})|^{1/d}$ et $\mathcal{M}_2(x) = h(x)|d^2f|(x)$, expression explicite connue pour $d = m = 3$.

Expressions de K_m et de \mathcal{M}_m

Dans le cas des éléments \mathbb{P}_1 on a

$$K_2(\mathbf{q}) = \kappa \sqrt{|\det(\mathbf{q})|}, \quad \kappa = \kappa(\text{sign}(\det(\mathbf{q}))),$$

et la métrique optimale de la forme $\mathcal{M}_2(x) = h(x)|d^2f|(x)$.

Dans le cas des éléments \mathbb{P}_2 on trouve

$$K_3(\mathbf{q}) = \kappa |\text{disc}(\mathbf{q})|^{\frac{1}{4}}, \quad \kappa = \kappa(\text{sign}(\text{disc}(\mathbf{q}))),$$

avec $\text{disc}(ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3) := b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d + 18abcd - 27a^2d^2$.

La métrique optimale $x \mapsto \mathcal{M}_3(x)$ se calcule explicitement à partir de matrices dépendant des coefficients (a, b, c, d) associés à $d^3f(x)$.

Éléments \mathbb{P}_m pour $m > 3$: pas d'expression explicite de K_m , mais il existe des équivalents polynomiaux (en les coefficients de \mathbf{q}), pas d'expression explicite de la mesure \mathcal{M}_m , calculable par des techniques d'optimisation (Cao).

Extension en dimension $d > 2$ (simplexes) : $K_2(\mathbf{q}) = \kappa |\det(\mathbf{q})|^{1/d}$ et $\mathcal{M}_2(x) = h(x)|d^2f|(x)$, expression explicite connue pour $d = m = 3$.

Expressions de K_m et de \mathcal{M}_m

Dans le cas des éléments \mathbb{P}_1 on a

$$K_2(\mathbf{q}) = \kappa \sqrt{|\det(\mathbf{q})|}, \quad \kappa = \kappa(\text{sign}(\det(\mathbf{q}))),$$

et la métrique optimale de la forme $\mathcal{M}_2(x) = h(x)|d^2f|(x)$.

Dans le cas des éléments \mathbb{P}_2 on trouve

$$K_3(\mathbf{q}) = \kappa |\text{disc}(\mathbf{q})|^{\frac{1}{4}}, \quad \kappa = \kappa(\text{sign}(\text{disc}(\mathbf{q}))),$$

avec $\text{disc}(ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3) := b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d + 18abcd - 27a^2d^2$.

La métrique optimale $x \mapsto \mathcal{M}_3(x)$ se calcule explicitement à partir de matrices dépendant des coefficients (a, b, c, d) associés à $d^3f(x)$.

Éléments \mathbb{P}_m pour $m > 3$: pas d'expression explicite de K_m , mais il existe des équivalents polynomiaux (en les coefficients de \mathbf{q}), pas d'expression explicite de la mesure \mathcal{M}_m , calculable par des techniques d'optimisation (Cao).

Extension en dimension $d > 2$ (simplexes) : $K_2(\mathbf{q}) = \kappa |\det(\mathbf{q})|^{1/d}$ et $\mathcal{M}_2(x) = h(x)|d^2f|(x)$, expression explicite connue pour $d = m = 3$.

Maillage optimaux pour l'erreur du gradient

On remplace la norme d'erreur L^p par la semi-norme

$$|u|_{W^{1,p}} := \|\nabla u\|_{L^p}.$$

On considère l'approximation par éléments \mathbb{P}_{m-1} . Pour tout $\mathbf{q} \in H_m[X, Y]$ on définit :

$$K'_m(\mathbf{q}) := \min_{|T|=1} e'_T(\mathbf{q})_p,$$

où $e'_T(\mathbf{q})$ est l'erreur d'approximation en semi-norme $W^{1,p}(T)$. On a alors

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} N^{\frac{m}{2}} \inf_{\#\mathcal{T}_N \leq N} \|f - f_N\|_{L^p} \leq \|K'_m(\frac{d^m f}{m!})\|_{L^\tau}, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{1}{p} + \frac{m}{2}.$$

Expressions explicites de K'_m et de la métrique optimale $x \mapsto \mathcal{M}'_m(x)$ disponibles pour $m = 2$ et $m = 3$ (par exemple $\mathcal{M}'_2(x) = h(x)|d^2 f(x)|^2$).

Différence avec la norme L^p : les triangles doivent être presque unitaires pour la métrique optimale **mais de plus les angles proches de π doivent être évités** (Babushka, Jamet) et la triangulation optimale utilise des triangles aigus.

Réalisable par les algorithmes de génération de maillage ?

Maillage optimaux pour l'erreur du gradient

On remplace la norme d'erreur L^p par la semi-norme

$$|u|_{W^{1,p}} := \|\nabla u\|_{L^p}.$$

On considère l'approximation par éléments \mathbb{P}_{m-1} . Pour tout $\mathbf{q} \in H_m[X, Y]$ on définit :

$$K'_m(\mathbf{q}) := \min_{|T|=1} e'_T(\mathbf{q})_p,$$

où $e'_T(\mathbf{q})$ est l'erreur d'approximation en semi-norme $W^{1,p}(T)$. On a alors

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} N^{\frac{m}{2}} \inf_{\#\{\mathcal{T}_N\} \leq N} \|f - f_N\|_{L^p} \leq \|K'_m(\frac{d^m f}{m!})\|_{L^\tau}, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{1}{p} + \frac{m}{2}.$$

Expressions explicites de K'_m et de la métrique optimale $x \mapsto \mathcal{M}'_m(x)$ disponibles pour $m = 2$ et $m = 3$ (par exemple $\mathcal{M}'_2(x) = h(x)|d^2 f(x)|^2$).

Différence avec la norme L^p : les triangles doivent être presque unitaires pour la métrique optimale **mais de plus les angles proches de π doivent être évités** (Babushka, Jamet) et la triangulation optimale utilise des triangles aigus.

Réalisable par les algorithmes de génération de maillage ?

Maillage optimaux pour l'erreur du gradient

On remplace la norme d'erreur L^p par la semi-norme

$$|u|_{W^{1,p}} := \|\nabla u\|_{L^p}.$$

On considère l'approximation par éléments \mathbb{P}_{m-1} . Pour tout $\mathbf{q} \in H_m[X, Y]$ on définit :

$$K'_m(\mathbf{q}) := \min_{|T|=1} e'_T(\mathbf{q})_p,$$

où $e'_T(\mathbf{q})$ est l'erreur d'approximation en semi-norme $W^{1,p}(T)$. On a alors

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} N^{\frac{m}{2}} \inf_{\#\{\mathcal{T}_N\} \leq N} \|f - f_N\|_{L^p} \leq \|K'_m(\frac{d^m f}{m!})\|_{L^\tau}, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{1}{p} + \frac{m}{2}.$$

Expressions explicites de K'_m et de la métrique optimale $x \mapsto \mathcal{M}'_m(x)$ disponibles pour $m = 2$ et $m = 3$ (par exemple $\mathcal{M}'_2(x) = h(x)|d^2 f(x)|^2$).

Différence avec la norme L^p : les triangles doivent être presque unitaires pour la métrique optimale **mais de plus les angles proches de π doivent être évités** (Babushka, Jamet) et la triangulation optimale utilise des triangles aigus.

Réalisable par les algorithmes de génération de maillage ?

Maillage optimaux pour l'erreur du gradient

On remplace la norme d'erreur L^p par la semi-norme

$$|u|_{W^{1,p}} := \|\nabla u\|_{L^p}.$$

On considère l'approximation par éléments \mathbb{P}_{m-1} . Pour tout $\mathbf{q} \in H_m[X, Y]$ on définit :

$$K'_m(\mathbf{q}) := \min_{|T|=1} e'_T(\mathbf{q})_p,$$

où $e'_T(\mathbf{q})$ est l'erreur d'approximation en semi-norme $W^{1,p}(T)$. On a alors

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} N^{\frac{m}{2}} \inf_{\#\{\mathcal{T}_N\} \leq N} \|f - f_N\|_{L^p} \leq \|K'_m(\frac{d^m f}{m!})\|_{L^\tau}, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{1}{p} + \frac{m}{2}.$$

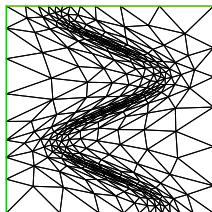
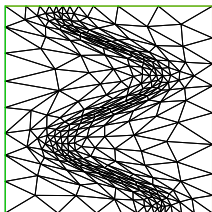
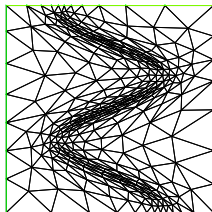
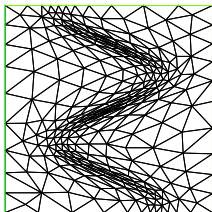
Expressions explicites de K'_m et de la métrique optimale $x \mapsto \mathcal{M}'_m(x)$ disponibles pour $m = 2$ et $m = 3$ (par exemple $\mathcal{M}'_2(x) = h(x)|d^2 f(x)|^2$).

Différence avec la norme L^p : les triangles doivent être presque unitaires pour la métrique optimale **mais de plus les angles proches de π doivent être évités** (Babushka, Jamet) et la triangulation optimale utilise des triangles aigus.

Réalisable par les algorithmes de génération de maillage ?

Exemple

Fonction $f(x, y) = \tanh(10(\sin(5y) - 2x)) + x^3 + xy^2$ (transition rapide autour de la courbe $2x = \sin(5y)$). Maillages de 500 triangles optimisés pour éléments \mathbb{P}_1 (haut) et \mathbb{P}_2 (bas), norme L^2 (gauche) et semi-norme $W^{1,2}$ (droite).



Algorithmes

Approche classique en éléments \mathbb{P}_1 : construire une triangulation \mathcal{T}_N où chaque triangle T est isotrope pour la métrique associée à la valeur locale de $|d^2 f|$ et de taille ajustée telle que l'erreur locale soit équidistribuée.

Limitations :

- Construction basée sur la connaissance ou l'estimation du Hessien : très sensible au bruit, ne s'applique pas à $f \in L^p$ arbitraire.
- Non-hiérarchique : \mathcal{T}_N n'est pas un raffinement de \mathcal{T}_{N-1} .

Objectif : algorithmes hiérarchiques produisant des triangulations anisotropes optimales.

Algorithmes

Approche classique en éléments \mathbb{P}_1 : construire une triangulation \mathcal{T}_N où chaque triangle T est isotrope pour la métrique associée à la valeur locale de $|d^2 f|$ et de taille ajustée telle que l'erreur locale soit équidistribuée.

Limitations :

- Construction basée sur la connaissance ou l'estimation du Hessien : très sensible au bruit, ne s'applique pas à $f \in L^p$ arbitraire.
- Non-hiérarchique : \mathcal{T}_N n'est pas un raffinement de \mathcal{T}_{N-1} .

Objectif : algorithmes hiérarchiques produisant des triangulations anisotropes optimales.

Algorithmes

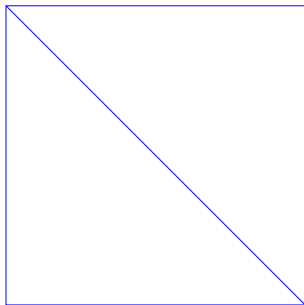
Approche classique en éléments \mathbb{P}_1 : construire une triangulation \mathcal{T}_N où chaque triangle T est isotrope pour la métrique associée à la valeur locale de $|d^2 f|$ et de taille ajustée telle que l'erreur locale soit équilibrée.

Limitations :

- Construction basée sur la connaissance ou l'estimation du Hessien : très sensible au bruit, ne s'applique pas à $f \in L^p$ arbitraire.
- Non-hiérarchique : \mathcal{T}_N n'est pas un raffinement de \mathcal{T}_{N-1} .

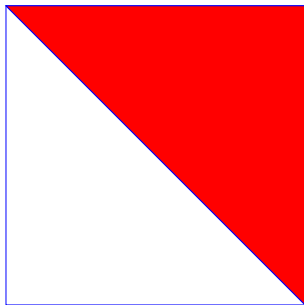
Objectif : algorithmes hiérarchiques produisant des triangulations anisotropes optimales.

Un algorithme hiérarchique (Dyn, Hecht, AC)



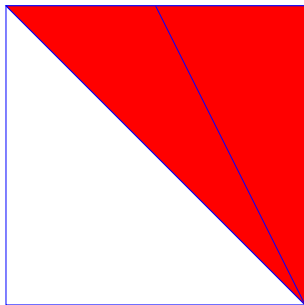
Triangulation grossière \Rightarrow triangle maximisant $e_T(f)_p \Rightarrow$ choix de la bisection qui réduit au mieux l'erreur \Rightarrow découpage \Rightarrow on itère ... jusqu'au nombre de triangles ou à la précision souhaitée.

Un algorithme hiérarchique (Dyn, Hecht, AC)



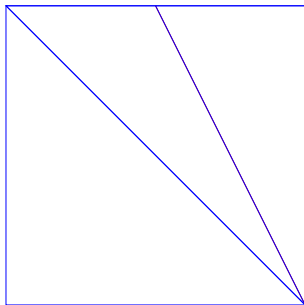
Triangulation grossière \Rightarrow triangle maximisant $e_T(f)_p \Rightarrow$ choix de la bisection qui réduit au mieux l'erreur \Rightarrow découpage \Rightarrow on itère ... jusqu'au nombre de triangles ou à la précision souhaitée.

Un algorithme hiérarchique (Dyn, Hecht, AC)



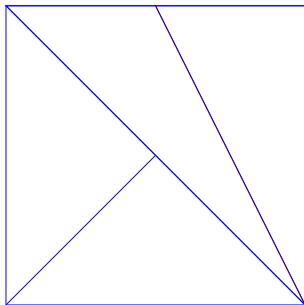
Triangulation grossière \Rightarrow triangle maximisant $e_T(f)_p \Rightarrow$ choix de la bisection qui réduit au mieux l'erreur \Rightarrow découpage \Rightarrow on itère ... jusqu'au nombre de triangles ou à la précision souhaitée.

Un algorithme hiérarchique (Dyn, Hecht, AC)



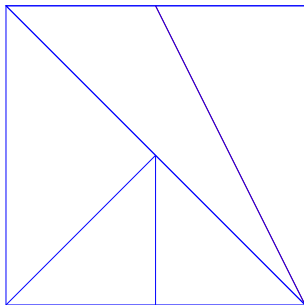
Triangulation grossière \Rightarrow triangle maximisant $e_T(f)_p \Rightarrow$ choix de la bisection qui réduit au mieux l'erreur \Rightarrow découpage \Rightarrow on itère ... jusqu'au nombre de triangles ou à la précision souhaitée.

Un algorithme hiérarchique (Dyn, Hecht, AC)



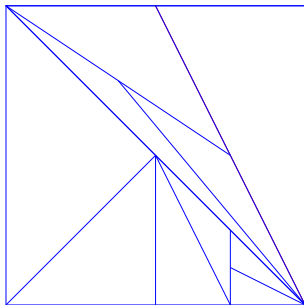
Triangulation grossière \Rightarrow triangle maximisant $e_T(f)_p \Rightarrow$ choix de la bisection qui réduit au mieux l'erreur \Rightarrow découpage \Rightarrow on itère ... jusqu'au nombre de triangles ou à la précision souhaitée.

Un algorithme hiérarchique (Dyn, Hecht, AC)



Triangulation grossière \Rightarrow triangle maximisant $e_T(f)_p \Rightarrow$ choix de la bisection qui réduit au mieux l'erreur \Rightarrow découpage \Rightarrow on itère ... jusqu'au nombre de triangles ou à la précision souhaitée.

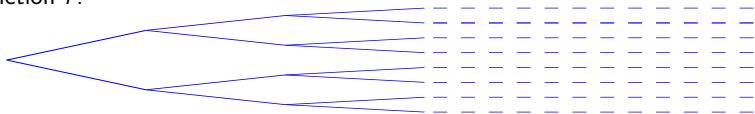
Un algorithme hiérarchique (Dyn, Hecht, AC)



Triangulation grossière \Rightarrow triangle maximisant $e_T(f)_p \Rightarrow$ choix de la bisection qui réduit au mieux l'erreur \Rightarrow découpage \Rightarrow on itère ... jusqu'au nombre de triangles ou à la précision souhaitée.

Avantages de la structure hiérarchique

Le processus de bisection définit un **arbre binaire de décision**, qui dépend de la fonction f .



L'algorithme greedy définit une suite de sous-arbres finis pour approcher f .

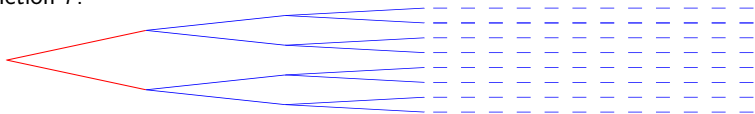
Autres options :

- Sous-arbres optimisés (algorithme CART).
- Analyse multirésolution.
- Seuillage des coefficients d'ondelettes.

Un sous-arbre de N feuilles peut être codé par $4N$ bits..

Avantages de la structure hiérarchique

Le processus de bisection définit un **arbre binaire de décision**, qui dépend de la fonction f .



L'algorithme greedy définit une suite de sous-arbres finis pour approcher f .

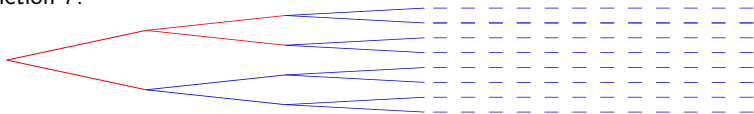
Autres options :

- Sous-arbres optimisés (algorithme CART).
- Analyse multirésolution.
- Seuillage des coefficients d'ondelettes.

Un sous-arbre de N feuilles peut être codé par $4N$ bits..

Avantages de la structure hiérarchique

Le processus de bisection définit un **arbre binaire de décision**, qui dépend de la fonction f .



L'algorithme greedy définit une suite de sous-arbres finis pour approcher f .

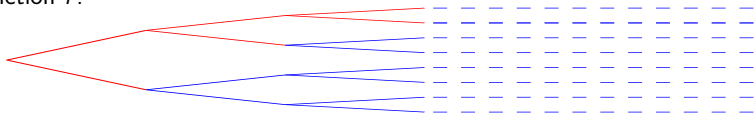
Autres options :

- Sous-arbres optimisés (algorithme CART).
- Analyse multirésolution.
- Seuillage des coefficients d'ondelettes.

Un sous-arbre de N feuilles peut être codé par $4N$ bits..

Avantages de la structure hiérarchique

Le processus de bisection définit un **arbre binaire de décision**, qui dépend de la fonction f .



L'algorithme greedy définit une suite de sous-arbres finis pour approcher f .

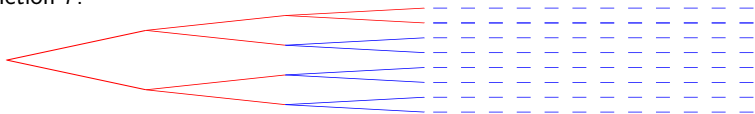
Autres options :

- Sous-arbres optimisés (algorithme CART).
- Analyse multirésolution.
- Seuillage des coefficients d'ondelettes.

Un sous-arbre de N feuilles peut être codé par $4N$ bits..

Avantages de la structure hiérarchique

Le processus de bisection définit un **arbre binaire de décision**, qui dépend de la fonction f .



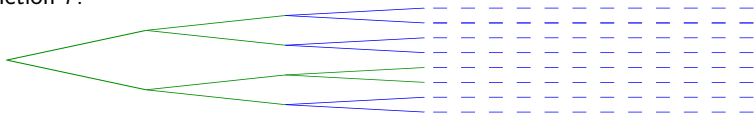
L'algorithme greedy définit une suite de sous-arbres finis pour approcher f .
Autres options :

- Sous-arbres optimisés (algorithme CART).
- Analyse multirésolution.
- Seuillage des coefficients d'ondelettes.

Un sous-arbre de N feuilles peut être codé par $4N$ bits..

Avantages de la structure hiérarchique

Le processus de bisection définit un **arbre binaire de décision**, qui dépend de la fonction f .



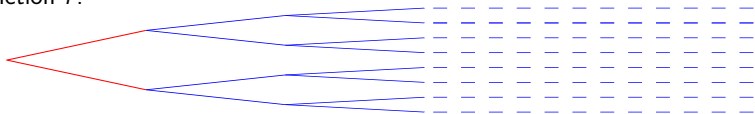
L'algorithme greedy définit une suite de sous-arbres finis pour approcher f .
Autres options :

- Sous-arbres optimisés (algorithme CART).
- Analyse multirésolution.
- Seuillage des coefficients d'ondelettes.

Un sous-arbre de N feuilles peut être codé par $4N$ bits..

Avantages de la structure hiérarchique

Le processus de bisection définit un **arbre binaire de décision**, qui dépend de la fonction f .



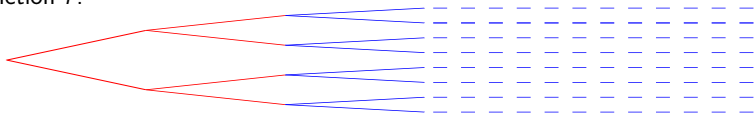
L'algorithme greedy définit une suite de sous-arbres finis pour approcher f .
Autres options :

- Sous-arbres optimisés (algorithme CART).
- Analyse multirésolution.
- Seuillage des coefficients d'ondelettes.

Un sous-arbre de N feuilles peut être codé par $4N$ bits..

Avantages de la structure hiérarchique

Le processus de bisection définit un **arbre binaire de décision**, qui dépend de la fonction f .



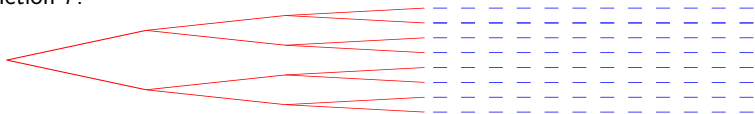
L'algorithme greedy définit une suite de sous-arbres finis pour approcher f .
Autres options :

- Sous-arbres optimisés (algorithme CART).
- Analyse multirésolution.
- Seuillage des coefficients d'ondelettes.

Un sous-arbre de N feuilles peut être codé par $4N$ bits..

Avantages de la structure hiérarchique

Le processus de bisection définit un **arbre binaire de décision**, qui dépend de la fonction f .



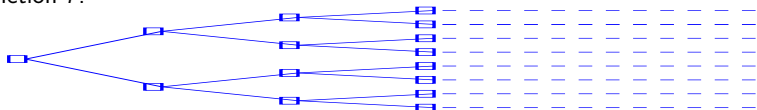
L'algorithme greedy définit une suite de sous-arbres finis pour approcher f .
Autres options :

- Sous-arbres optimisés (algorithme CART).
- Analyse multirésolution.
- Seuillage des coefficients d'ondelettes.

Un sous-arbre de N feuilles peut être codé par $4N$ bits..

Avantages de la structure hiérarchique

Le processus de bisection définit un **arbre binaire de décision**, qui dépend de la fonction f .



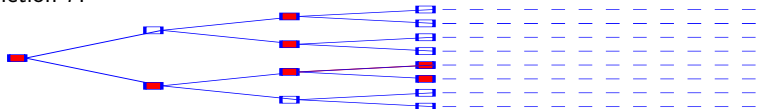
L'algorithme greedy définit une suite de sous-arbres finis pour approcher f .
Autres options :

- Sous-arbres optimisés (algorithme CART).
- Analyse multirésolution.
- Seuillage des coefficients d'ondelettes.

Un sous-arbre de N feuilles peut être codé par $4N$ bits..

Avantages de la structure hiérarchique

Le processus de bisection définit un **arbre binaire de décision**, qui dépend de la fonction f .



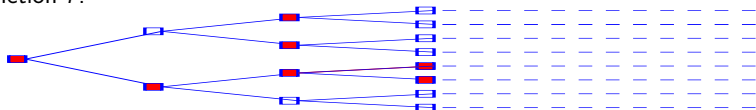
L'algorithme greedy définit une suite de sous-arbres finis pour approcher f .
Autres options :

- Sous-arbres optimisés (algorithme CART).
- Analyse multirésolution.
- Seuillage des coefficients d'ondelettes.

Un sous-arbre de N feuilles peut être codé par $4N$ bits..

Avantages de la structure hiérarchique

Le processus de bisection définit un **arbre binaire de décision**, qui dépend de la fonction f .



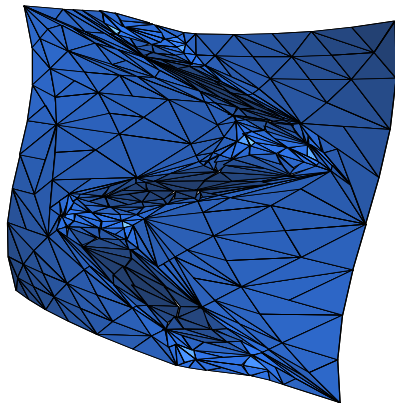
L'algorithme greedy définit une suite de sous-arbres finis pour approcher f .
Autres options :

- Sous-arbres optimisés (algorithme CART).
- Analyse multirésolution.
- Seuillage des coefficients d'ondelettes.

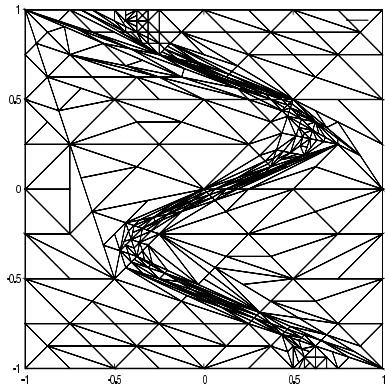
Un sous-arbre de N feuilles peut être codé par $4N$ bits..

L'agorithme génère des triangles anisotropes bien orientés

Exemple : zone de transition le long d'une courbe.



Approximation



Triangulation

Analyse de l'algorithme

Pour tout triangle T de côtés (a, b, c) on introduit une **fonction de décision** $e \mapsto d_T(f, e)$ pour $e \in \{a, b, c\}$. Deux choix étudiés :

$$d_T(f, e) := \|f - I_{T'}f\|_{L^\infty(T')} + \|f - I_{T''}f\|_{L^\infty(T'')},$$

et

$$d_T(f, e) := \|f - P_{T'}f\|_{L^2(T')}^2 + \|f - P_{T''}f\|_{L^2(T'')}^2,$$

où (T', T'') sont obtenus en bisectant le côté e .

Pour $T \in \mathcal{T}_N$ maximisant $e_T(f)_p$ l'algorithme bisecte le côté $e \in \{a, b, c\}$ qui minimise la fonction de décision :

$$d_T(f, e) = \min\{d_T(f, a), d_T(f, b), d_T(f, c)\}.$$

On étudie l'algorithme si f est une fonction quadratique, puis on s'y ramène localement par des arguments de perturbation

Analyse de l'algorithme

Pour tout triangle T de côtés (a, b, c) on introduit une **fonction de décision** $e \mapsto d_T(f, e)$ pour $e \in \{a, b, c\}$. Deux choix étudiés :

$$d_T(f, e) := \|f - I_{T'} f\|_{L^\infty(T')} + \|f - I_{T''} f\|_{L^\infty(T'')},$$

et

$$d_T(f, e) := \|f - P_{T'} f\|_{L^2(T')}^2 + \|f - P_{T''} f\|_{L^2(T'')}^2,$$

où (T', T'') sont obtenus en bisectant le côté e .

Pour $T \in \mathcal{T}_N$ maximisant $e_T(f)_p$ l'algorithme bisecte le côté $e \in \{a, b, c\}$ qui minimise la fonction de décision :

$$d_T(f, e) = \min\{d_T(f, a), d_T(f, b), d_T(f, c)\}.$$

On étudie l'algorithme si f est une fonction quadratique, puis on s'y ramène localement par des arguments de perturbation

Analyse de l'algorithme

Pour tout triangle T de côtés (a, b, c) on introduit une **fonction de décision** $e \mapsto d_T(f, e)$ pour $e \in \{a, b, c\}$. Deux choix étudiés :

$$d_T(f, e) := \|f - I_{T'} f\|_{L^\infty(T')} + \|f - I_{T''} f\|_{L^\infty(T'')},$$

et

$$d_T(f, e) := \|f - P_{T'} f\|_{L^2(T')}^2 + \|f - P_{T''} f\|_{L^2(T'')}^2,$$

où (T', T'') sont obtenus en bisectant le côté e .

Pour $T \in \mathcal{T}_N$ maximisant $e_T(f)_p$ l'algorithme bisecte le côté $e \in \{a, b, c\}$ qui minimise la fonction de décision :

$$d_T(f, e) = \min\{d_T(f, a), d_T(f, b), d_T(f, c)\}.$$

On étudie l'algorithme si f est une fonction quadratique, puis on s'y ramène localement par des arguments de perturbation

Cas d'une fonction quadratique

Supposons $f(x) = q(x) = x^2 + y^2$. Si tous les angles de T sont inférieurs à $\pi/2$, on a $\|q - I_T q\|_{L^\infty(T)} = r_T^2$ avec r_T le rayon du cercle circonscrit. Sinon $\|q - I_T q\|_{L^\infty(T)} = \frac{1}{4} \max\{|a|^2, |b|^2, |c|^2\}$

Ceci permet de montrer que la fonction de décision basée sur la norme L^∞ sélectionne le côté le plus long. Pour q polynôme quadratique avec \mathbf{q} positive ou négative l'algorithme **bisecte le côté le plus long dans la métrique $|\cdot|_q$** .

Pour toute fonction quadratique q ,

$$\|q - P_T q\|_{L^2(T)}^2 = |T| (C_1(\mathbf{q}(a) + \mathbf{q}(b) + \mathbf{q}(c))^2 - C_2 \det(\mathbf{q}) |T|^2),$$

avec $C_1 = \frac{1}{1200}$ et $C_2 = \frac{4}{225}$.

Ceci permet de montrer que pour q polynôme quadratique tel que $\det(\mathbf{q}) > 0$ la fonction de décision basée sur la norme L^2 sélectionne le plus long dans la métrique $|\cdot|_q$.

Cas d'une fonction quadratique

Supposons $f(x) = q(x) = x^2 + y^2$. Si tous les angles de T sont inférieurs à $\pi/2$, on a $\|q - I_T q\|_{L^\infty(T)} = r_T^2$ avec r_T le rayon du cercle circonscrit. Sinon $\|q - I_T q\|_{L^\infty(T)} = \frac{1}{4} \max\{|a|^2, |b|^2, |c|^2\}$

Ceci permet de montrer que la fonction de décision basée sur la norme L^∞ sélectionne le côté le plus long. Pour q polynôme quadratique avec \mathbf{q} positive ou négative l'algorithme **bisecte le côté le plus long dans la métrique $|\cdot|_{\mathbf{q}}$** .

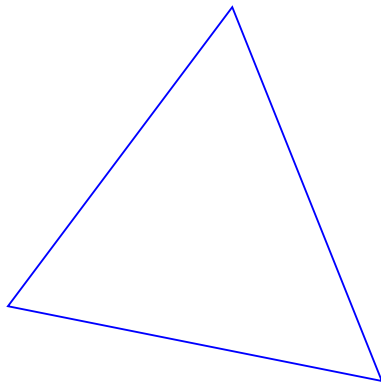
Pour toute fonction quadratique q ,

$$\|q - P_T q\|_{L^2(T)}^2 = |T|(C_1(\mathbf{q}(a) + \mathbf{q}(b) + \mathbf{q}(c))^2 - C_2 \det(\mathbf{q})|T|^2),$$

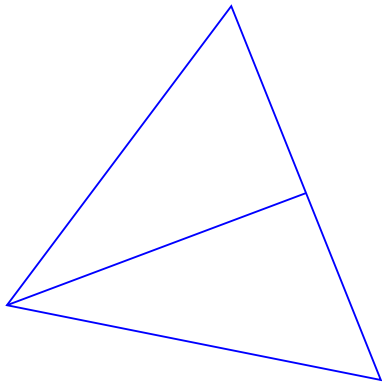
avec $C_1 = \frac{1}{1200}$ et $C_2 = \frac{4}{225}$.

Ceci permet de montrer que pour q polynôme quadratique tel que $\det(\mathbf{q}) > 0$ la fonction de décision basée sur la norme L^2 sélectionne le plus long dans la métrique $|\cdot|_{\mathbf{q}}$.

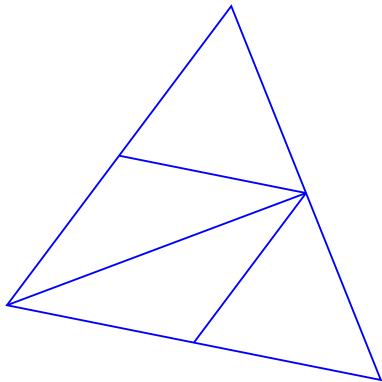
La bisection du plus long côté préserve l'isotropie



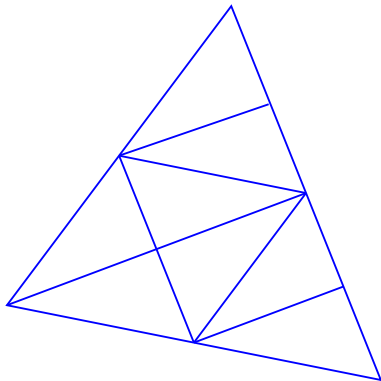
La bisection du plus long côté préserve l'isotropie



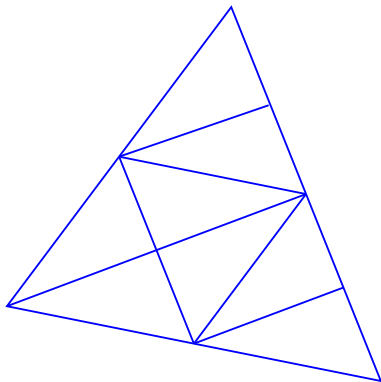
La bisection du plus long côté préserve l'isotropie



La bisection du plus long côté préserve l'isotropie

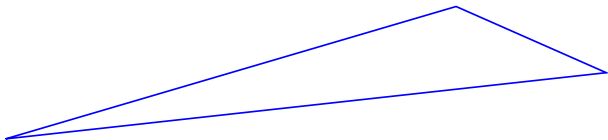


La bisection du plus long côté préserve l'isotropie



Si θ est l'angle minimal du triangle de départ, les triangles produits ont un angle minimal supérieur à $\theta/2$ (Rivara).

La bisection du plus long côté restaure l'isotropie



Si q est quadratique et $\det(\mathbf{q}) > 0$, et si $|a|_q \geq |b|_q \geq |c|_q$, on pose

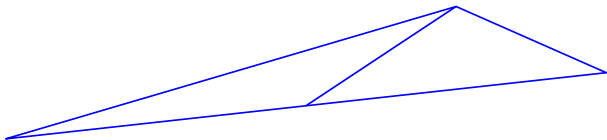
$$\sigma_q(T) := \frac{|b|_q^2 + |c|_q^2}{4|T|\sqrt{\det(|d^2f|)}},$$

qui vérifie $c_1\sigma_q(T) \leq \rho_q(T) \leq c_2\sigma_q(T)$ pour tout T et q .

Théorème : $\sigma_q(T)$ décroît par bisection du plus long côté. Après 3 raffinements successifs, au moins l'un des 8 triangles $(T_i)_{i=1, \dots, 8}$ vérifie $\sigma_q(T_i) \leq \frac{3}{4}\sigma_q(T)$ ou $\sigma_q(T_i) < 4$.

Théorème : après j raffinement successifs, la proportion de triangles tels que $\sigma_q(T) \leq 4$ est supérieure à $1 - \theta^j$ avec $\theta < 1$.

La bisection du plus long côté restaure l'isotropie



Si q est quadratique et $\det(q) > 0$, et si $|a|_q \geq |b|_q \geq |c|_q$, on pose

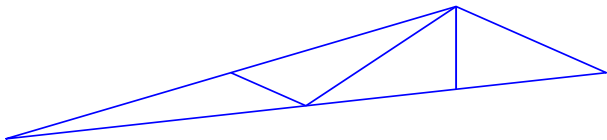
$$\sigma_q(T) := \frac{|b|_q^2 + |c|_q^2}{4|T|\sqrt{\det(|d^2f|)}},$$

qui vérifie $c_1\sigma_q(T) \leq \rho_q(T) \leq c_2\sigma_q(T)$ pour tout T et q .

Théorème : $\sigma_q(T)$ décroît par bisection du plus long côté. Après 3 raffinements successifs, au moins l'un des 8 triangles $(T_i)_{i=1, \dots, 8}$ vérifie $\sigma_q(T_i) \leq \frac{3}{4}\sigma_q(T)$ ou $\sigma_q(T_i) < 4$.

Théorème : après j raffinements successifs, la proportion de triangles tels que $\sigma_q(T) \leq 4$ est supérieure à $1 - \theta^j$ avec $\theta < 1$.

La bisection du plus long côté restaure l'isotropie



Si q est quadratique et $\det(\mathbf{q}) > 0$, et si $|a|_q \geq |b|_q \geq |c|_q$, on pose

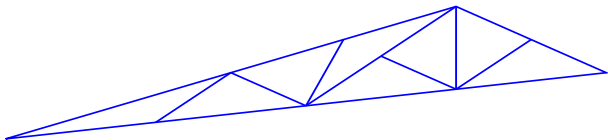
$$\sigma_q(T) := \frac{|b|_q^2 + |c|_q^2}{4|T|\sqrt{\det(|d^2f|)}},$$

qui vérifie $c_1\sigma_q(T) \leq \rho_q(T) \leq c_2\sigma_q(T)$ pour tout T et q .

Théorème : $\sigma_q(T)$ décroît par bisection du plus long côté. Après 3 raffinements successifs, au moins l'un des 8 triangles $(T_i)_{i=1, \dots, 8}$ vérifie $\sigma_q(T_i) \leq \frac{3}{4}\sigma_q(T)$ ou $\sigma_q(T_i) < 4$.

Théorème : après j raffinements successifs, la proportion de triangles tels que $\sigma_q(T) \leq 4$ est supérieure à $1 - \theta^j$ avec $\theta < 1$.

La bisection du plus long côté restaure l'isotropie



Si q est quadratique et $\det(q) > 0$, et si $|a|_q \geq |b|_q \geq |c|_q$, on pose

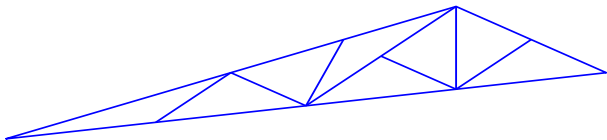
$$\sigma_q(T) := \frac{|b|_q^2 + |c|_q^2}{4|T|\sqrt{\det(|d^2 f|)}},$$

qui vérifie $c_1 \sigma_q(T) \leq \rho_q(T) \leq c_2 \sigma_q(T)$ pour tout T et q .

Théorème : $\sigma_q(T)$ décroît par bisection du plus long côté. Après 3 raffinements successifs, au moins l'un des 8 triangles $(T_i)_{i=1, \dots, 8}$ vérifie $\sigma_q(T_i) \leq \frac{3}{4} \sigma_q(T)$ ou $\sigma_q(T_i) < 4$.

Théorème : après j raffinements successifs, la proportion de triangles tels que $\sigma_q(T) \leq 4$ est supérieure à $1 - \theta^j$ avec $\theta < 1$.

La bisection du plus long côté restaure l'isotropie



Si q est quadratique et $\det(\mathbf{q}) > 0$, et si $|a|_q \geq |b|_q \geq |c|_q$, on pose

$$\sigma_q(T) := \frac{|b|_q^2 + |c|_q^2}{4|T|\sqrt{\det(|d^2 f|)}},$$

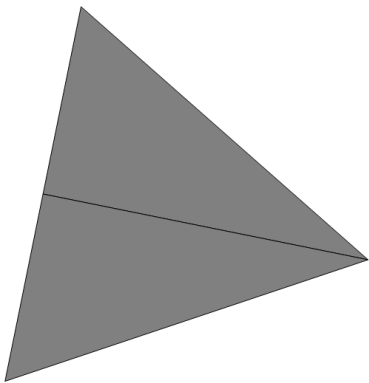
qui vérifie $c_1 \sigma_q(T) \leq \rho_q(T) \leq c_2 \sigma_q(T)$ pour tout T et q .

Théorème : $\sigma_q(T)$ décroît par bisection du plus long côté. Après 3 raffinements successifs, au moins l'un des 8 triangles $(T_i)_{i=1, \dots, 8}$ vérifie $\sigma_q(T_i) \leq \frac{3}{4} \sigma_q(T)$ ou $\sigma_q(T_i) < 4$.

Théorème : après j raffinement successifs, la proportion de triangles tels que $\sigma_q(T) \leq 4$ est supérieure à $1 - \theta^j$ avec $\theta < 1$.

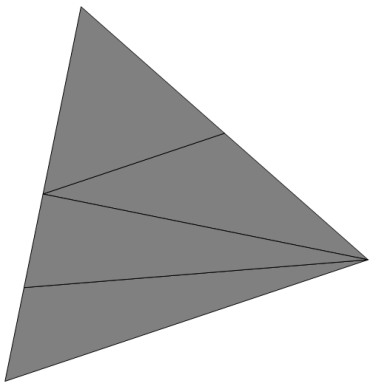
Exemple

Avec $q = x^2 + 100y^2$. En gris : triangles tels que $\sigma_q(T) > 4$.



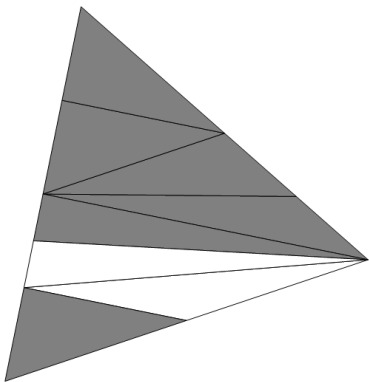
Exemple

Avec $q = x^2 + 100y^2$. En gris : triangles tels que $\sigma_q(T) > 4$.



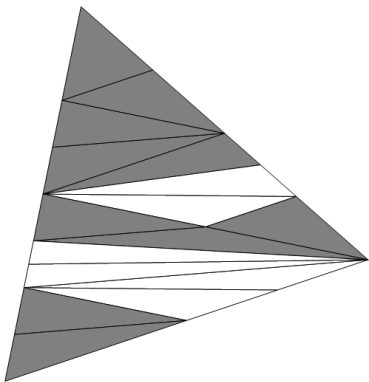
Exemple

Avec $q = x^2 + 100y^2$. En gris : triangles tels que $\sigma_q(T) > 4$.



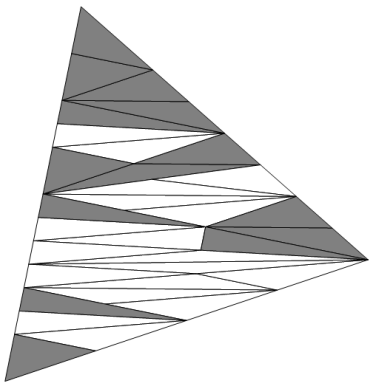
Exemple

Avec $q = x^2 + 100y^2$. En gris : triangles tels que $\sigma_q(T) > 4$.



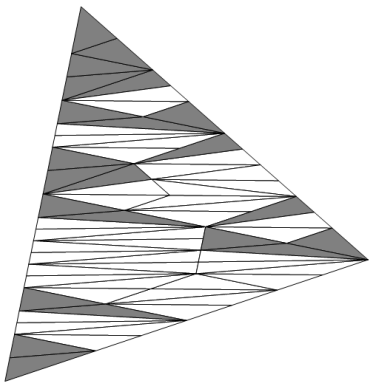
Exemple

Avec $q = x^2 + 100y^2$. En gris : triangles tels que $\sigma_q(T) > 4$.



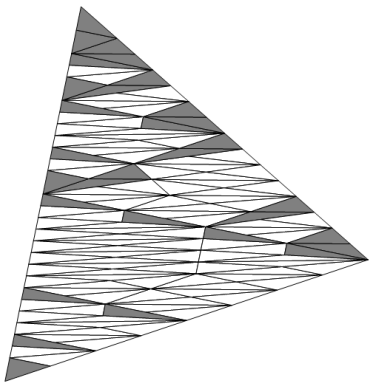
Exemple

Avec $q = x^2 + 100y^2$. En gris : triangles tels que $\sigma_q(T) > 4$.



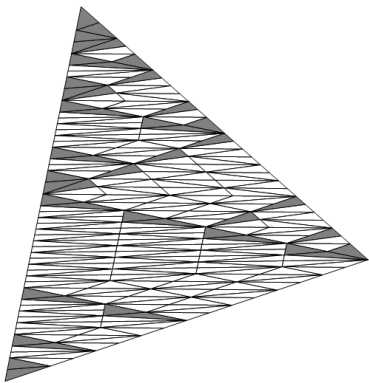
Exemple

Avec $q = x^2 + 100y^2$. En gris : triangles tels que $\sigma_q(T) > 4$.



Exemple

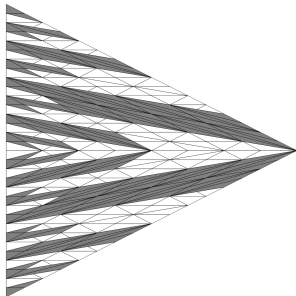
Avec $q = x^2 + 100y^2$. En gris : triangles tels que $\sigma_q(T) > 4$.



Le cas $\det(\mathbf{q}) < 0$

On peut montrer aussi que la proportion des triangles tels que $\rho_{\mathbf{q}}(T) \leq C_0$ tend vers 1 quand on augmente le niveau de raffinement.

Exemple $\mathbf{q} = x^2 - 10y^2$. En blanc : triangles tels que $\sigma_{|\mathbf{q}|}(T) \leq 4$, i.e. isotropes pour la métrique $|\mathbf{q}| = x^2 + 10y^2$. Les autres triangles ont une faibles valeurs de $\rho_{\mathbf{q}}(T)$ car alignés avec le cône nul de \mathbf{q} .



Estimation optimale

Analyse basée sur une perturbation locale du comportement mis en évidence pour une fonction quadratique. Limitation actuelle aux fonctions strictement convexes (ou concaves), pour lesquels on peut prouver que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \max_{T \in \mathcal{T}_N} h_T = 0.$$

Théorème : soit f fonction C^2 telle que $d^2f \geq \alpha I$ ou $d^2f \leq -\alpha I$ avec $\alpha > 0$. L'algorithme greedy dans L^p utilisant la fonction de décision basée sur la norme L^∞ vérifie

$$\|f - f_N\|_{L^p} \leq CN^{-1} \|\sqrt{\det(|d^2f|)}\|_{L^\tau}, \quad 1/\tau = 1/p + 1,$$

pour $N > N_0(f)$, avec C constante indépendante de f .

L'algorithme peut être mis en échec par des oscillations

L'adversaire : soit le triangle de référence $\{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ et une fonction

$$f(x, y) = g(x),$$

où g est définie sur $[0, 1]$ et s'annule en $0, 1/2$ et 1 . Alors les interpolations de f sur tous les sous-triangles sont nulles et la procédure peut choisir n'importe quelle bisection. Dans le cas où le sommet $(1, 0)$ est choisi, cette situation persiste et **l'algorithme ne converge pas**

Solution : on utilise la procédure de bisection basée sur la fonction de décision si elle réduit l'erreur sur T d'un facteur $\theta < 1$ fixé, sinon bisection du plus long côté ou depuis le dernier sommet créée. On a alors

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|f - f_N\|_{L^p} = 0,$$

pour tout $f \in L^p$.

Conjecture : si $\theta_0 \leq \theta < 1$, l'algorithme modifié vérifie

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} N \|f - f_N\|_{L^p} \leq C \|\sqrt{|\det(d^2 f)|}\|_{L^\tau},$$

pour tout $f \in C^2$.

L'algorithme peut être mis en échec par des oscillations

L'adversaire : soit le triangle de référence $\{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ et une fonction

$$f(x, y) = g(x),$$

où g est définie sur $[0, 1]$ et s'annule en $0, 1/2$ et 1 . Alors les interpolations de f sur tous les sous-triangles sont nulles et la procédure peut choisir n'importe quelle bisection. Dans le cas où le sommet $(1, 0)$ est choisi, cette situation persiste et **l'algorithme ne converge pas**

Solution : on utilise la procédure de bisection basée sur la fonction de décision si elle réduit l'erreur sur T d'un facteur $\theta < 1$ fixé, sinon bisection du plus long côté ou depuis le dernier sommet créée. On a alors

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|f - f_N\|_{L^p} = 0,$$

pour tout $f \in L^p$.

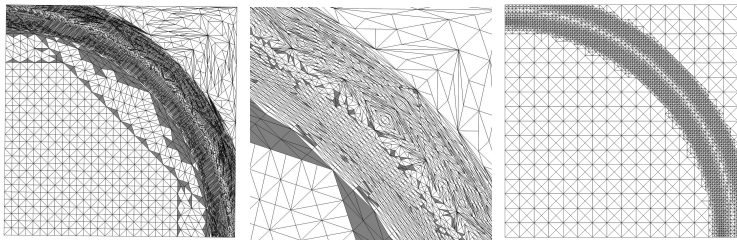
Conjecture : si $\theta_0 \leq \theta < 1$, l'algorithme modifié vérifie

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} N \|f - f_N\|_{L^p} \leq C \|\sqrt{|\det(d^2 f)|}\|_{L^\tau},$$

pour tout $f \in C^2$.

Illustration numérique

On prend $f(x, y) = g_\delta(x^2 + y^2)$ où g_δ est une fonction régulière avec une transition rapide dans la région $[1, 1 + \delta]$.



\mathcal{T}_{10000} (a), détail (b), triangulation isotrope (c).

En gris : T tels que $\sigma_{\mathbf{q}}(T) \geq 4$ pour $\mathbf{q} = |d^2 f_{b_T}|$, avec b_T le barycentre de T .

Validation des bornes théoriques

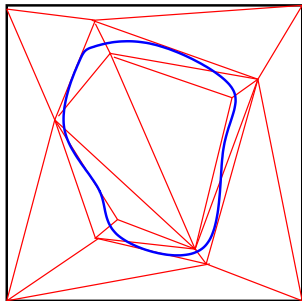
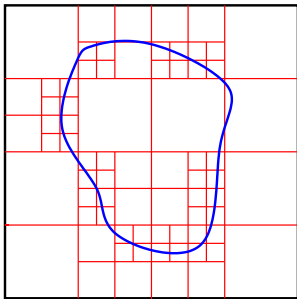
Pour l'erreur L^2 , la vitesse de convergence est $\mathcal{O}(N^{-1})$ pour des raffinement uniformes (U), adaptatifs isotropes (I) ou adaptatifs anisotropes (A). De plus les constantes empiriques C_U , C_I et C_A sont en accord avec les grandeurs théoriques $U(f) := \|d^2f\|_{L^2}$, $I(f) := \|d^2f\|_{L^{2/3}}$ et $A(f) := \|\sqrt{\det(|d^2f|)}\|_{L^{2/3}}$.

δ	$U(f)$	$I(f)$	$A(f)$	C_U	C_I	C_A
0.2	103	27	6.75	7.87	1.78	0.74
0.1	602	60	8.50	23.7	2.98	0.92
0.05	1705	82	8.48	65.5	4.13	0.92
0.02	3670	105	8.47	200	6.60	0.92

Seuls C_A et $A(f)$ restent bornés quand $\delta \rightarrow 0$.

Fonctions régulières par morceaux et images "cartoon"

Soit f une fonction régulière par morceaux de part et d'autre d'une courbe Γ de discontinuité de régularité C^2 .



Eléments isotropes : $\|f - f_N\|_{L^2} \leq CN^{-1/2}$ avec $C \sim TV(f)$.

Vitesse comparable avec le seuillage en ondelettes.

Eléments anisotropes : $\|f - f_N\|_{L^2} \leq CN^{-1}$ où C dépend de la courbure de Γ .

Vitesse comparable avec le seuillage en curvelets, bandlets, shearlets...

Extension de $A(f)$ aux images "cartoon"

Pour une telle fonction f , on considère sa régularisation

$$f_\delta := \varphi_\delta * f,$$

avec $\varphi_\delta(x) := \frac{1}{\delta^2} \varphi(\frac{x}{\delta})$, où $\varphi \in \mathcal{D}$ est telle que $\int \varphi = 1$, et $\delta > 0$.

Théorème : quand $\delta \rightarrow 0$ la quantité $A(f_\delta)^{2/3} = \int_\Omega |\sqrt{\det(|d^2 f_\delta|)}|^{2/3}$ converge vers

$$A(f)^{2/3} := \int_{\Omega \setminus \Gamma} |\sqrt{\det(|d^2 f|)}|^{2/3} + C(\varphi) \int_\Gamma |[f](s)|^{2/3} |\gamma''(s)|^{1/3} ds,$$

où $[f]$ est le saut de f et γ la paramétrisation normale de Γ .

Comparaison avec la **variation totale** :

$$TV(f) := \int_{\Omega \setminus \Gamma} |\nabla f| + \int_\Gamma |[f](s)| |\gamma'(s)| ds,$$

$A(f)$ pénalise la **régularité** de Γ alors que $TV(f)$ ne pénalise que sa **longueur**.

Invariance affine

La quantité $|\gamma''(s)|^{1/3}$ apparait dans l'équation la plus simple d'évolution de courbe qui soit invariante par transformation affine (Morel) :

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \kappa^{1/3} \mathbf{n},$$

où κ est la courbure et \mathbf{n} la normale.

Les trois quantités

$$\min_{\#\mathcal{T} \leq N} \|f - f_N\|_{L^2},$$

$$\|\sqrt{\det(|d^2f|)}\|_{L^{2/3}},$$

$$\int_{\Gamma} |[f](s)|^{2/3} |\gamma''(s)|^{1/3} ds,$$

sont invariantes par transformation affine au sens où elles vérifient toutes

$$Q(f \circ \phi) = |\det(d\phi)|^{-1/2} Q(f).$$

Perspectives

- Utilisation de $A(f)$ comme substitut de $TV(f)$ en traitement d'image.
- Convergence optimale de l'algorithme pour toute fonction C^2 ?
- Comportement sur des fonctions régulières par morceaux (edges).
- Comparaison avec curvelets, bandlets, edgelets...
- Variantes de l'algorithme (plus de choix de subdivision ?).
- Théorie et algorithme pour l'ordre $m > 1$ et dimension $d > 2$.
- Applications en compression de données (allocation binaire).
- Applications en débruitage, régression et apprentissage.
- Applications en simulation numérique des EDP.
- Combiner Hiérarchie + Anisotropie + **Conformité ?**

articles : www.ann.jussieu.fr/~cohen