Estimation ponctuelle

Définition d'un estimateur

Si X est une variable aléatoire de loi P_θ indexée par $\theta \in \mathrm{F}$ et si $\mathrm{E} = \mathrm{X}(\Omega)$, alors un estimateur de θ est une application $\mathrm{T}_n : \mathrm{E}^n \longrightarrow \mathrm{F}$ qui, à un échantillon $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$ de la variable X associe une variable aléatoire réelle dont on peut déterminer la probabilité.

Construction d'un estimateur

Méthode simple

Si le paramètre à estimer est $\theta = \mathrm{E}(\mathrm{X})$, l'estimateur naturel est la moyenne empirique

$$\mathrm{T}_n = \overline{\mathrm{X}}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$$

Si le paramètre à estimer est $\theta = \mathrm{V}(\mathrm{X})$, l'estimateur naturel est la variance empirique

$$\mathrm{T}_n = \mathrm{S}_n'^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}}_n)^2$$

Méthode des moments

Si l'un des moments d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ de X dépend de θ, on cherche un estimateur en résolvant l'équation obtenue en égalant moment théorique et moment empirique :

$$\mathrm{E}_\theta(\mathrm{X}^k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i{}^k$$

ou

$$\mathrm{E}_\theta[(\mathrm{X} - \mathrm{E}(\mathrm{X}))^k] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}}_n)^k$$

Cas particulier : pour les moments d'ordre 1 et 2, les équations s'écrivent

$$\mathrm{E}_\theta(\mathrm{X}) = \overline{\mathrm{X}}_n \quad \text{et} \quad \mathrm{V}_\theta(\mathrm{X}) = \mathrm{S}_n'^2$$

Méthode du maximum de vraisemblance

La vraisemblance d'un échantillon $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$ est définie par

$$\mathrm{L}(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta)$$

si la loi de X est de densité f, et par

$$\mathrm{L}(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{X}_i = x_i | \theta)$$

si la loi de X est discrète.
La log-vraisemblance est égale à $\ln \mathrm{L}(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n; \theta)$.

L'estimateur T_n du maximum de vraisemblance est la valeur de θ qui maximise L (ou ln(L)).
Si L est deux fois dérivable, c'est la valeur θ telle que

$$\frac{\partial \ln(\mathrm{L})}{\partial \theta} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 \ln(\mathrm{L})}{\partial \theta^2} < 0$$

Si T_n est un estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ, alors $g(\mathrm{T}_n)$ est aussi un estimateur du maximum de vraisemblance de $g(\theta)$ (mais il a nécessairement un biais si T_n n'en a pas).

Propriétés des estimateurs

Biais

Le biais d'un estimateur est défini par $b_n(\theta) = \mathrm{E}_\theta(\mathrm{T}_n) - \theta$.
Un estimateur T_n de θ est dit **sans biais** si $\mathrm{E}_\theta(\mathrm{T}_n) = \theta$.

Biais asymptotique

Un estimateur T_n de θ est dit **asymptotiquement sans biais** si $\mathrm{E}_\theta(\mathrm{T}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$.

Convergence

Un estimateur T_n est dit **convergent** si la suite de variables aléatoires (T_n) converge en probabilité vers θ.
Cas particulier : un estimateur T_n sans biais ou asymptotiquement sans biais et dont la variance tend vers 0 est convergent.

Moyenne et variance empiriques

D'après la loi des grands nombres, la moyenne empirique $\overline{\mathrm{X}}_n$ est un estimateur sans biais et convergent, quelle que soit la loi de la variable X.

La variance empirique $\mathrm{S}_n'^2$ est un estimateur asymptotiquement sans biais et convergent, quelle que soit la loi de la variable X.

La variance empirique modifiée

$$\mathrm{S}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}}_n)^2$$

est un estimateur sans biais et convergent, quelle que soit la loi de la variable X.

Information de Fisher

Si T_n est un estimateur du paramètre θ, la quantité d'information de Fisher de T_n est

$$\mathrm{I}_n(\theta) = \mathrm{E}_\theta\left(\left(\frac{\partial \ln \mathrm{L}}{\partial \theta}\right)^2\right)$$

Sous les hypothèses de Cramer-Rao (vérifiées par les lois usuelles), et si $\mathrm{E} = \mathrm{X}(\Omega)$ est indépendant de θ,

$$\mathrm{I}_n(\theta) = \mathrm{E}_\theta\left(-\frac{\partial^2 \ln \mathrm{L}}{\partial \theta^2}\right)$$

Efficacité

Sous les hypothèses de Cramer-Rao (vérifiées par les lois usuelles), et si $\mathrm{E} = \mathrm{X}(\Omega)$ est indépendant de θ, un estimateur T_n est **efficace** si

$$\mathrm{V}(\mathrm{T}_n) = \frac{1}{\mathrm{I}_n(\theta)}$$

Comparaison de deux estimateurs sans biais

Sous les hypothèses de Cramer-Rao (vérifiées par les lois usuelles), et si $\mathrm{E} = \mathrm{X}(\Omega)$ est indépendant de θ, l'inégalité de Cramer-Rao assure que

$$\mathrm{V}(\mathrm{T}_n) \geqslant \frac{1}{\mathrm{I}_n(\theta)}$$

Pour comparer deux estimateurs sans biais, le plus efficace est celui qui a la variance la plus petite.

Exemples d'estimateurs : paramètres des lois classiques

Les principales lois classiques sont traitées dans les exemples vues en cours :
Loi uniforme sur $[\,0\,;\theta\,]$ **:** exemple 7
Loi exponentielle de paramètre $1/\theta$ **:** exemple 8
Loi exponentielle sur $[\,\theta\,;+\infty\,[$ **:** exemple 9
Loi de Poisson de paramètre θ **:** exemple 10
Loi de Bernoulli de paramètre θ **:** exemple 11
Loi normale de paramètres (m,σ) **:** exemple 12

Rappels mathématiques

Calculs avec les puissances

Si $x, y, a, b, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ (sous réserve d'existence des nombres ci-dessous),

$$\begin{aligned} x^a \cdot x^b &= x^{a+b} \\ (x^a)^b &= x^{a\times b} \\ x^a \cdot y^a &= (xy)^a \\ \frac{1}{x^a} &= x^{-a} \\ \frac{x^a}{x^b} &= x^{a-b} \\ \frac{x^a}{y^a} &= \left(\frac{x}{y}\right)^a \\ \prod_{i=1}^{n} x^{a_i} &= x^{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i} \end{aligned}$$

Calculs avec les logarithmes

Si $a, b, x, x_1, \ldots, x_n > 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \ln(ab) &= \ln(a) + \ln(b) \\ \ln(a/b) &= \ln(a) - \ln(b) \\ \ln(1/x) &= 1 - \ln(x) \\ \ln(x^n) &= n\ln(x) \\ \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) \end{aligned}$$

Calculs avec les exponentielles

Si $a, b, x, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \exp(a+b) &= \exp(a) \times \exp(b) \\ \exp(a-b) &= \frac{\exp(a)}{\exp(b)} \\ \exp(-x) &= \frac{1}{\exp(x)} \\ \exp(nx) &= (\exp(x))^n \\ \exp\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) &= \prod_{i=1}^{n} \exp(x_i) \end{aligned}$$

Calculs de dérivées

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	condition
x^n	nx^{n-1}	$n(n-1)x^{n-2}$	$n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\frac{2}{x^3}$	$x \neq 0$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-2}{x^3}$	$\frac{6}{x^4}$	$x \neq 0$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$\frac{n(n+1)}{x^{n+2}}$	$n \in \mathbb{N}, x \neq 0$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$x > 0$
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\exp(x)$	$x \in \mathbb{R}$

$f(x)$	$f'(x)$	condition
$(u(x))^n$	$n(u(x))^{n-1}u'(x)$	$n \in \mathbb{N}, u(x) \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{(u(x))^n}$	$\frac{-nu'(x)}{(u(x))^{n+1}}$	$n \in \mathbb{N}, u(x) \neq 0$
$\ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$u(x) > 0$
$\exp(u(x))$	$\exp(u(x))u'(x)$	$u(x) \in \mathbb{R}$

Calculs de primitives

Elles sont données dans le tableau précédent, en le lisant de droite à gauche (la primitive de f' est f).