Théorème de Foster

Exercice 1 **Théorème de Kolmogorov pour les chaînes périodiques**

Soit $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov irréductible, récurrente positive et de période d et de probabilité stationnaire π.

1. Montrer que la chaîne $\{X_{nd}\}_{n\in\mathbb{N}}$ possède d classes de communication $\mathcal{C}_1,\ldots,\mathcal{C}_d$, toutes apériodiques.

2. Que vaut $\sum_{i\in\mathcal{C}_1}\pi(i)$?

3. Quelle est la probabilité stationnaire de la classe de communication $\mathcal{C}_1$?

4. En déduire le comportement de la suite $p_{i,j}(n)$ quand $n\to\infty$.

Exercice 2 **Chaîne $p-q$**

Soit X une chaîne de Markov de noyau de transition Q tel que $Q(i,i+1)=p_i$ lorsque $i\geq 0$, $Q(i,i-1)=p_i$ lorsque $i\leq 0$, $Q(i,i-1)=q_i$ lorsque $i>0$ et $Q(i,i+1)=q_i$ lorsque $i<0$ et $Q(i,j)=0$ sinon.

1. Donnez une représentation graphique de Q.

2. Montrer que si $\lim_{|k|\to+\infty}\sup p_k<\frac{1}{2}$, alors X est récurrente positive.

Exercice 3 **Chaîne de Markov avec glissement**

Soit $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoire i.i.d. telle que $\mathbb{P}[\xi_0=1]=\mathbb{P}[\xi_0=-1]=\frac{1}{2}$ et $b:(\mathbb{Z}\to\mathbb{Z})$ telle que $\forall x\in\mathbb{Z},|b(x)|<|x|$, $\forall x>0,b(x)<0$ et $\forall x<0,b(x)>0$. On considère le processus X défini par l'équation de récurence :

$$\forall n\in\mathbb{N},X_{n+1}=X_n+b(X_n)+\xi_{n+1}$$

1. Montrez que X est une chaîne de Markov homogène.

2. Montrez que X est récurente positive.

Exercice 4 **Une file d'attente**

On suppose une file d'attente avec le comportement suivant : au temps n, a_{n+1} paquets arrivent, les arrivées étant i.i.d. et indépendantes du comportement de la file d'attente. Si il y a moins de 100 paquets dans la file, alors un paquet arrivé avant le temps n est servi (si la file n'est pas vide). S'il y a i paquets dans la file au temps n (avant comptage des arrivées) avec $i\geq 100$, alors avec probabilité p_i la moitié ($\lceil i/2\rceil$) des paquets sont supprimés de la file, et avec probabilité $1-p_i$, un paquet est servi.

Donner une représentation de la chaîne de Markov associée à cette file. Donner une condition de stabilité et une condition de non stabilité de la file en fonction des p_i et des arrivées.

Exercice 5 **Deux politiques de partage d'un canal**

Un canal de communication est partagé entre $K>1$ classes d'utilisateurs. Les utilisateurs de classe k offrent un trafic i.i.d. de A_n^k paquets dans la case n. Les trafics offerts sont indépendants. Les deux politiques suivantes sont considérées.

(a) La case de temps n est attribuée à la classe k avec probabilité p_k, avec $\sum_{k=1}^{K}p_k=1$, les attributions étant indépendantes. Dans ce cas un paquet de la classe k est transmis s'il y a des paquets de cette classe en attente au début de la case et ce dernier n'est pas utilisé sinon.

(b) La case n est attribuée de manière équiprobable à l'une des classes ayant des paquets en attente au début de la case.

Soit X_n^k le nombre de paquets de classe k en attente au début de la case n et soit $X_n = (X_n^1, \dots, X_n^K)$.

1. Montrer que pour chaque politique, $\{X_n\}$ est une chaîne de Markov homogène sur $\mathbb{N}_0^K$ en donnant des représentations de la forme $X_{n+1} = f(X_n, \xi_{n+1})$, où $\{\xi_n\}$ est une suite i.i.d.

2. Montrer que si pour tout k, $p_k > 0$, $P(A_0^k = 0) > 0$ et $P(A_0^k = \ell) > 0$ pour un ℓ qui ne dépend pas de k, alors il y a irréductibilité.

3. Pour la politique (b), montrer que la chaîne est récurrente positive si $\sum_{k=1}^K \mathbb{E}\, A_0^k < 1$.