Lemme de Lovász

Exercice 1 **Coloriage**

Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté et supposons qu'à chaque sommet $v \in V$ est associé un ensemble $S(v)$ de $8r$ couleurs, $r \geq 1$. En outre, pour chaque sommet v et chaque couleur $c \in S(v)$, il y a au plus r voisins u de v tels que $c \in S(u)$.

Montrer qu'il existe alors un coloriage propre (pas deux sommets adjacents avec la même couleur) tel que pour tout v, la couleur associée à v est choisie dans $S(v)$.

Exercice 2 **Chemins disjoints**

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté et n et m deux constantes strictement positives. On considère n couples de sommets (u_1, v_1), (u_2, v_2), ..., (u_n, v_n) et, pour chaque couple (u_i, v_i), un ensemble F_i de m chemins allant de u_i à v_i.

Supposons que, pour tout $j \neq i$, chaque chemin de F_i partage des arêtes avec au plus k chemins de F_j.

Montrer que si $8nk/m \leq 1$, alors il existe $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in F_1 \times \ldots \times F_n$ tel que les chemins γ_i soient disjoints.

Exercice 3 **Routage dans les graphes petit-monde**

En 1967, le sociologue Stanley Milgram publia les résultats d'une de ses expériences. Il demanda à des individus de transmettre chacun une enveloppe à un autre individu, avec comme information sur le destinataire, son nom, son adresse et sa profession. L'enveloppe ne pouvait pas être envoyée directement, mais passer par des connaissances. Il apparut qu'une grande quantité des enveloppes arrivèrent à destination et que le nombre de d'intermédiaires était d'au plus 6 dans la plupart des cas. C'est ce qu'on appelle le phénomène *petit monde*. Dans les graphes d'Erdös-Rényi, cela se traduit par le fait que le diamètre d'un graphe est logarithmique en le nombre de sommets.

On s'intéresse ici au routage dans des graphes qui ont la propriété d'avoir un petit diamètre (ce que l'on admet dans cet exercice), et plus particulièrement au modèle de Kleinberg : les sommets du graphes sont sur une grille $\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, m\}$. Deux sommets sont voisins si $|u, v| = 1$ (où $|.|$ est la distance L_1. On ajoute à cette grille des *raccourcis*, q par sommets. Un sommet u a un raccourci vers v avec probabilité $|u - v|^{-\alpha} / \sum_{w \neq u} |u - w|^{-\alpha}$.

On s'intéresse au cas où $\alpha = 2$. Et on considère le routage glouton suivant : à chaque pas, on va vers le voisin le plus proche (au sens L_1) de la destination finale. On fixe u une source, v une destination, et $u(t)$ est le sommet atteint après t pas. On dit que $u(t)$ est en phase j à la date t si $2^j < |u(t) - v| \leq 2^{j+1}$. On note $T_{alg}(u, v)$ le nombre d'étapes pour aller de u à v avec cet algorithme.

1. Quelle est la probabilité que $u(t + 1)$ appartienne une meilleure phase que $u(t)$? Montrer que cette probablité est supérieure à $1/72(1 + \log(2m))$.

2. En déduire que $E(T_{alg}(u, v)) = O(\log(n)^2)$.

On s'intéresse maintenant que cas où $\alpha \neq 2$ et nous allons montrer que cet algorithme glouton n'est plus efficace.

3. Montrer, dans le cas où $\alpha < 2$ que $E(T_{alg}(u, v)) = \Omega(m^{\frac{2-\alpha}{3}})$. On pourra pour ce faire s'intéresser au dernier raccourci pris lors d'un routage de longueur t et à la distance de ce dernier raccourci à v.

4. Montrer, dans le cas où $\alpha > 2$ que l'algorithme de routage de u vers v s'effectue en moyenne en $E(T_{alg}(u, v)) = \Omega(|u - v|^{\gamma})$ avec $\gamma = (\alpha - 2)/(\alpha - 1)$. On pourra tout d'abord calculer le probabilité d'avoir un raccourci de longueur au moins d à partir d'un sommet, puis borner la probabilité qu'on ne puisse pas avoir de routage en t étapes pour des sommets distants d'au moins $td+1$.

Exercice 4 **Lemme local de Lovász général**

Le but de cet exercice est de montrer le théorème suivant :

Soient $E_1, \ldots, E_n$ des événements dans un espace de probabilité arbitraire, et $G=(V,E)$ le graphe de dépendance de ces événements. S'il existe des nombres $x_1, \ldots, x_n \in [0,1[$ tels que pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$P(E_i) \leq x_i \prod_{j:(i,j)\in E} (1-x_j),$$

alors

$$P(\cap_{i=1}^n \bar{E}_i) \geq \prod_{i=1}^n (1-x_i) > 0.$$

Soit $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$. On va montrer par récurrence sur s que si $|S| \leq s$, alors $P(\cap_{j\in S}\bar{E}_j) \geq \prod_{j\in S}(1-x_j) > 0$ et pour tout k,

$$P(E_k \mid \cap_{j\in S} \bar{E}_j) \leq x_k. \qquad \text{(H)}$$

1. Montrer que ceci est vrai pour $s=0$.

On suppose que la propriété est vraie pour s, et on considère un ensemble S de cardinal $s+1$.

2. Montrer que $P(\cap_{j\in S}\bar{E}_j) \geq \prod_{j\in S}(1-x_j) > 0$.

On fixe k, on pose $S_1 = \{j \in S \mid (k,j) \in E\}$ et $S_2 = S - S_1$, ainsi que $F_1 = \cap_{j\in S_1}\bar{E}_j$, $F_2 = \cap_{j\in S_2}\bar{E}_j$ et $F = F_1 \cap F_2$.

3. Montrer que (H) est satisfaite si $S_2 = S$.

4. Montrer que $P(E_k \mid F) = \frac{P(E_k \cap F_1 \mid F_2)}{P(F_1 \mid F_2)}$.

5. Montrer que $P(E_k \cap F_1 \mid F_2) \leq x_k \prod_{j:(k,j)\in E}(1-x_j)$ et que $P(F_1 \mid F_2) \geq \prod_{j:(k,j)\in E}(1-x_j)$. En déduire que (H) est satisfaite.

6. Conclure.

7. En déduire le corollaire suivant (Lemme local de Lovász asymétrique) :

Soient $E_1, \ldots, E_n$ des événements dans un espace de probabilité arbitraire, et $G=(V,E)$ le graphe de dépendance de ces événements. pour tout $1 \leq i \leq n$, $\sum_{j:(i,j)\in E} P(E_j) \leq 1/4$, alors $P(\cap_{i=1}^n \bar{E}_i) > 0$. *Indication :* prendre $x_i = 2P(E_i)$.