Simulation Parfaite

Exercice 1 **Monotonie et modèle d'Ising**

Soit X une chaîne de Markov sur un espace S fini. Si $|S|$ est grand, l'algorithme de simulation parfaite a une complexité trop grande pour pouvoir être efficace. On voudrait donc se contenter de simuler un petit nombre de trajectoires.

Soit

$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

1. Donner une représentation fonctionnelle $\phi : \{1, \ldots, 5\} \times [0,1] \to \{1, \ldots, 5\}$ telle que $\forall u \in [0,1]$, $i \leq j \Rightarrow \phi(i,u) \leq \phi(j,u)$.

Soit S un ensemble fini ordonné et qui admet un unique élément minimal $s_{\min}$ et un unique élément maximal $s_{\max}$.

2. Montrer que si une chaîne de Markov sur S admet une représentation fonctionnelle $\phi : S \times [0,1] \to S$ telle que $\forall u \in [0,1]$,

$$i \leq j \Rightarrow \phi(i,u) \leq \phi(j,u),$$

il suffit de simuler les trajectoires issues de $s_{\min}$ et s_{max} dans l'algorithme de Propp et Wilson.

On considère maintenant le modèle d'Ising. On va simuler une chaîne de Markov dont la probabilité stationnaire est celle du champ de Gibbs associé au modèle d'Ising. On se donne donc une grille carrée de taille N, et chaque sommet peut prendre la valeur 1 ou -1.

Le potentiel d'une clique $\{s,t\}$ de taille 2 est

$$V_{\{s,t\}}(x) = -x(s)x(t),$$

et 0 pour tous les autres ensembles.

3. Calculer les caractérisations locales du modèle d'Ising pour une température T fixée.

La chaîne que l'on veut simuler a le comportement suivant : à chaque étape,

1. on choisit un site s de manière uniforme ;
2. on modifie la valeur du champ au site s selon sa caractérisation locale.

Soient $k_+(s,x)$ le nombre de voisins de s ayant pour valeur $+1$ dans la configuration x et $k_-(s,x)$ le nombre de voisins de s ayant pour valeur -1.

4. Donner les probabilités de transition de cette chaîne de Markov, en fonction de $k_+(s,x)$ et $k_-(s,x)$.

5. Soient x et y deux configurations telles que $x \leq y$ (*i.e.* $\forall s$, $x(s) \leq y(s)$). Montrer que l'on peut choisir une représentation fonctionnelle qui conserve cet ordre.

6. En déduire que l'on peut effectuer la simulation parfaite à partir de deux états uniquement.

Exercice 2 **Chaîne de Dyer-Greenhill**

On cherche à échantillonner un ensemble indépendant d'un graphe G quelconque.

On considère pour cela l'algorithme suivant, qui a pour but de simuler le noyau de transition d'une chaîne de Markov :

Données : Un graphe $G = (S, A)$, un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^+$, une probabilité d'échange p_{ech}, un ensemble indépendant B
Résultat : G et un autre ensemble indépendant C de G
début
  Choisir $v \in S$ de manière uniforme ;
  Tirer $U \in [0, 1]$ de manière uniforme ;
  si $U > \frac{\lambda}{1+\lambda}$ **alors** $B \leftarrow B \setminus \{v\}$;
  sinon si $U \leq \frac{\lambda}{1+\lambda}$ *et aucun voisin de v n'est dans B* **alors**
    $B \leftarrow B \cup \{v\}$;
  sinon si $U \leq p_{ech} \frac{\lambda}{1+\lambda}$ *et exactement un voisin w de v est dans B* **alors**
    $B \leftarrow (B \cup \{v\}) \setminus \{w\}$;
  Retourner B ;
fin

Algorithme 1 : Noyau de Dyer-Greenhill

1. Montrer qu'à G, λ et p_{ech} fixés, cet algorithme simule bien un noyau de transition markovien pour les ensembles indépendants de G.

On s'intéresse, pour la simulation précédemment décrite, au temps de couplage.

On considère pour cela la chaîne bornante suivante :

2. Exprimer $|D_{t+1}|$ en fonction de $|D_t|$, de $1_A, 1_B, 1_C, 1_E$ et 1_F, où

— A est l'évènement que l'on ai choisit un élément de D_t
— B est l'évènement que l'on soit dans le cas (3)
— C est l'évènement que l'on soit dans le cas (4)
— E est l'évènement que l'on soit dans le cas (5)
— F est l'évènement que l'on soit dans le cas (7)

3. En déduire l'expression de $\mathbb{E}[|D_{t+1}||B_t, D_t]$ en fonction de $|D_t|, n, p_{ech}$ et :

— $\alpha = \frac{\lambda}{\lambda+1}$
— N_{01} le nombre de sommets s vérifiant $|V(s) \cap B| = 0$ et $|V(s) \cap D| = 1$
— N_{11+} le nombre de sommets s vérifiant $|V(s) \cap B| = 1$ et $|V(s) \cap D| \geq 1$
— N_{02+} le nombre de sommets s vérifiant $|V(s) \cap B| = 0$ et $|V(s) \cap D| \geq 2$

4. En déduire que lorsque $p_{ech} = \frac{1}{4}$, $\Delta = d_{\max}(G)$ et $\lambda < \frac{2}{\Delta - 2}$, la chaîne bornante pour la chaîne de Dyer-Greenhill couple en $\log_{\frac{1}{\beta}}(n) + \theta$ étapes avec probabilité $1 - \beta^{\theta}$.

Données : Un graphe $G = (S, A)$, un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^+$, une probabilité d'échange p_{ech}, un ensemble indépendant B, un deuxième ensemble complémentaire D
Résultat : un autre ensemble indépendant B' obtenu à partir de B et un autre ensemble complémentaire D' obtenu à partir de D

début
- Choisir $v \in S$ de manière uniforme ;
- Tirer $U \in [0, 1]$ de manière uniforme ;
- **Disjonction de cas :**
  - (1) **si** $U > \frac{\lambda}{1+\lambda}$ **alors**
    - $B \leftarrow B \setminus \{v\}$;
    - $D \leftarrow D \setminus \{v\}$;
  - (2) **sinon si** $U \leq \frac{\lambda}{1+\lambda}, |V(v) \cap B| = |V(v) \cap D| = 0$ **alors**
    - $B \leftarrow B \cup \{v\}$;
    - $D \leftarrow D \setminus \{v\}$;
  - (3) **sinon si** $p_{ech}\frac{\lambda}{1+\lambda} < U \leq \frac{\lambda}{1+\lambda}$ **alors**
    - $B \leftarrow B \setminus \{v\}$;
    - $D \leftarrow D \cup \{v\}$;
  - (4) **sinon si** $U \leq p_{ech}\frac{\lambda}{\lambda+1}, |V(v) \cap B| = 0, |V(v) \cap D| = 1$ **alors**
    - $B \leftarrow B \cup \{v\}$;
    - $D \leftarrow D \setminus (\{v\} \cup (V(v) \cap D))$;
  - (5) **sinon si** $U \leq \frac{\lambda}{\lambda+1}, |V(v) \cap B| = 0, |V(v) \cap D| \geq 2$ **alors**
    - $B \leftarrow B \cup \{v\}$;
    - $D \leftarrow D \cup \{v\}$;
  - (6) **sinon si** $U \leq p_{ech}\frac{\lambda}{\lambda+1}, |V(v) \cap B| = 1, |V(v) \cap D| = 0$ **alors**
    - $B \leftarrow (B \cup \{v\}) \setminus V(v) \cap B$;
    - $D \leftarrow D \setminus \{v\}$;
  - (7) **sinon si** $U \leq p_{ech}\frac{\lambda}{\lambda+1}, |V(v) \cap B| = 1, |V(v) \cap D| \geq 1$ **alors**
    - $B \leftarrow B \setminus \{v\} \cup (V(v) \cap B)$;
    - $D \leftarrow D \cup \{v\} \cup (V(v) \cap B)$;
- **Fin Disjonction de cas**
- **Retourner** B et D ;

fin

Algorithme 2 : Noyau de transition de la chaîne bornante de Dyer-Greenhill