# Devoir maison 2

**A rendre pour le 22 janvier 2018.**

`Exercice 1` `Lancers de dés`

On lance un dé non biaisé de manière répétitive. Parmi les processus stochastiques suivants, lesquels sont des chaînes de Markov ? (justifier la réponse, donner une représentation des chaînes de Markov le cas échéant, donner ses charactéristiques principales (irréductibilité, période des classes de communication, récurrence...)

(a) $(X_n)_{n\geq 1}$, où $X_n$ est la plus grande valeur obtenue après $n$ lancers ;

(b) $(N_n)_{n\geq 0}$, où $N_n$ est le nombre de 6 obtenus après $n$ lancers ;

(c) $(C_n)_{n\geq 0}$, où $C_n$ est le nombre de lancers depuis le dernier 6 ;

(d) $(B_n)_{n\geq 0}$, où $B_n = \sum_{k=0}^{n} N_k$.

`Exercice 2` `Automate de comptage`

On se donne une suite $\{X_i\}$ de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\{0,1\}$, avec $P(X_1 = 0) = P(X_1 = 1) = 1/2$. Calculer la fréquence empirique asymptotique du nombre d'occurrences du motif 010, sans compter les occurrences qui chevauchent une occurrence déjà comptée.

$$0110\underline{010}111\underline{010}1\underline{010}101111\underline{010}111$$

La fréquence empirique asymptotique est la limite $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} A_n$, et $A_n$ le nombre d'occurrences valables entre les temps 1 et $n$.

`Exercice 3` `Urnes`

On considère $2N$ boules, $N$ blanches et $N$ noires réparties dans 2 urnes. Il y a $N$ boules par urne. A chaque instant, on choisit une boule au hasard (uniformément) dans chacune des urnes et on les échange. On note $X_n$ le nombre de boules noires dans la première urne après $n$ échanges.

**1.** Montrer que $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov. Préciser son espace d'état et sa matrice de transition. Quelle est sa période, est-elle irréductible ?

**2.** Montrer que sa probabilité stationnaire est de la forme $\pi(k) = c\binom{N}{k}^2$.

On admet que $c = \binom{2N}{N}^{-1}$

**3.** Quel est le temps moyen entre deux passages en $N$ ? Comparer avec le temps moyen entre deux passages en $\frac{N}{2}$ dans le cas où $N$ est pair.

`Exercice 4` `Valeur absolue d'une marche aléatoire`

Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ : $X_{n+1} = X_n + Z_{n+1}$ avec $X_0 = 0$ et $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables i.i.d. Bernouilli de paramètre $p$, $0 < p < 1/2$. On veut montrer que la suite $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{|X_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et $i, i_0, \ldots, i_{n-1} \in \mathbb{Z}$. Soit $j = \max\{k \leq n \mid i_k = 0\}$.

**1.** Montrer que $P(X_n = i | S_n = i, S_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, S_1 = i_1) = P(X_n = i | S_n = i, S_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, S_{j+1} = i_{j+1})$.

**2.** Que vaut $P(X_n = i | S_n = i, S_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, S_{j+1} = i_{j+1})$ ?

**3.** En déduire que pour tout $i > 0$, $P(X_n = i | S_n = i, S_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, S_1 = i_1) = \frac{p^i}{p^i + q^i}$, avec $q = 1 - p$.

**4.** Montrer que $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov. Quelles sont ses probabilités de transition ?

**5.** La chaîne $\{S_n\}$ est-elle récurrente ?

`Exercice 5` `Temps de couverture`

Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire sur le cycle de longueur $n$. Le temps de couverture $\tau_{cov}$ d'une chaîne de Markov est le premier temps auquel tous les états ont été visités. Le pire temps de couverture moyen est

$$t_{cov} = \max_{x\in E} \mathbf{E}_x(\tau_{cov}).$$

Le but de cet exercice est de calculer le temps de couverture pour le cycle de longueur $n$.

Considérons tout d'abord la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$. On note $c_k$ le premier temps auquel $k$ états ont été visités.

**1.** Donner une relation de récurrence entre $\mathbf{E}[c_k]$ et $\mathbf{E}[c_{k-1}]$.

**2.** En déduire $\mathbf{E}[c_n]$.

**3.** En déduire le temps de couverture du cycle de longueur $n$.

`Exercice 6` `Choix de file la plus courte`

On suppose un système de deux files d'attente, $q_1$ and $q_2$, donné dans la figure 1. A chaque instant

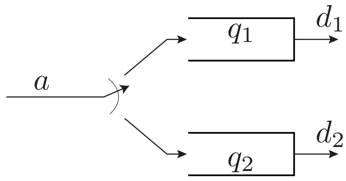


FIGURE 1 – Système avec deux files.

la probabilité qu'un paquet arrive dans le système est égale à $a$. A son arrivée, le paquet est dirigé vers la file la plus courte. Si le nombre de paquets est égal dans les deux files, le paquet est envoyé dans la file 1. Chaque file a un seul serveur et si la file $i$ n'est pas vide, un paquet est servi et quitte la file avec la probabilité $d_i$. Le paquet arrivé dans à l'instant $t$ peut être servi dans le même slot du temps. Soit $X_i(t)$ le nombre de paquets dans la file $i$ au temps $t$. Alors,

$$X_i(t+1) = X_i(t) + A_i(t) - D_i(t),\ i \in \{1,2\},$$

où $A_i(t)$ dénote le nombre de paquets arrivés dans la file $i$ et $D_i(t)$ les départs de la file $i$ à la date $t$.

**1.** Montrer que $X(t) = (X_1(t), X_2(t)),\ \ t \in \mathbb{N}$ est une chaîne de Markov. Sous quelles conditions on $a$, $d_1$ et $d_2$ cette chaîne est irréductible et appériodique ?

**2.** Supposons que $a = 0.4$ et $d_1 = d_2 = 0.25$. Alors la chaîne de Markov est récurrente positive. Cependant, la fonction $h(x) = x_1+x_2$ ne vérifie pas le critère de Foster. Expliquer pourquoi.

**3.** Est ce que les fonctions suivantes vérifient le critère de Foster ?

1. $h_a(x) = (x_1 + x_2)^2$,
2. $h_b(x) = (x_1 - x_2)^2$,
3. $h_c(x) = x_1^2 + x_2^2$.

Pour chaque fonction, justifier votre réponse.

**4.** Sous quelles conditions sur $a$, $d_1$ et $d_2$ la chaîne est récurrente positive ? Justifier votre réponse.

`Exercice 7` `Coloriages propres`

Soit $G = (S, A)$ un graphe non-orienté et $C$ un ensemble de couleurs. On note $\Delta$ le degré maximal du graphe, et l'on souhaite générer un coloriage propre des sommets de manière aléatoire et uniforme parmi tous les coloriages propres du graphe par des techniques de simulation de chaînes de Markov Monte-Carlo. On rappelle qu'un coloriage propre est un coloriage des sommets tels que deux sommets voisins ne sont pas de la même couleur. Plus formellement, un coloriage est une fonction $c : S \to C$ tel que $c(u) = c(v) \Rightarrow \{u, v\} \notin A$.

**1.** Proposer une fonction de représentation d'une chaîne de Markov irréductible apériodique, récurrente positive et réversible dont la distribution stationnaire est la distribution uniforme sur tous les coloriages propres. Combien de couleurs sont nécessaires pour que cette chaîne soit vraiment irréductible ?

On suppose que $|C| \geq 4\Delta + 1$ et on veut montrer qu'alors, $\tau(\epsilon)$, le temps de mélange de la chaîne satisfait

$$\tau(\epsilon) \leq \left\lceil \frac{|S||C|}{|C| - 4\Delta} \ln \frac{|S|}{\epsilon} \right\rceil .$$

Pour se faire, on construit un couplage de la chaîne définie à la question précédente.

**2.** Proposer un couplage $(X_n^1, X_n^2)$.

On note $D_n$ l'ensemble des sommets coloriés différemment entre $X_n^1$ et $X_n^2$ et $d_n = |D_n|$.

**3.** Donner une borne inférieure en fonction de $d_n$ pour $\mathbf{P}(d_{n+1} = d_n - 1 \mid d_n > 0)$ et une borne supérieure pour $\mathbf{P}(d_{n+1} = d_n + 1 \mid d_n > 0)$.

**4.** En déduire une borne supérieure pour $\mathbf{E}[d_{n+1} \mid d_n]$ et donc que

$$\mathbf{E}[d_n] \leq |S| \left(1 - \frac{|C| - 4\Delta}{|S||C|}\right)^n .$$

**5.** Conclure quant au temps de mélange de la chaîne.