TD : Modèles et algorithmes des réseaux

25 septembre 2018

Semi-anneaux et dioïdes

Exercice 1 (Propriétés simples des mono/dioïdes)**.** Soit $(E, \oplus)$ un monoïde.

1. Montrer que si $\oplus$ est commutative et idempotente, alors la relation de préordre canonique $\preceq$ est une relation d'ordre.
2. On suppose que $\oplus$ est commutative. Montrer que $\oplus$ est sélective (i.e. $a \oplus b \in \{a, b\}$) si et seulement si elle est idempotente et $\preceq$ est un ordre total sur E.
3. On suppose maitenant que $(E, \oplus)$ est un groupe non trivial (i.e. non réduit à un seul élément). Montrer que :
   — $\oplus$ ne peut pas être idempotente.
   — E ne peut pas être canoniquement ordonné.

Exercice 2 (Résolution d'équations dans un dioïde)**.** Soit $(S, \oplus, \otimes)$ un dioïde.

1. Montrer que $(\mathcal{M}_n(S), \oplus, \otimes)$ est aussi un dioïde.

   Soit $A \in \mathcal{M}_n(S)$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(S)$, avec $1 \leq n \leq m$. On considère l'équation suivante, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,m}(S)$:
   $$X = A \otimes X \oplus B \tag{1}$$
   On supposera par la suite que la matrice A^* existe.
2. Quel est le lien avec l'équation de Bellman-Ford ?
3. Montrer que la matrice $A^* \otimes B$ est une solution de l'équation (1).
4. Soit X une solution de (1). Montrer que pour tout $k \geq 0$, on a :
   $$X = A^{k+1} \otimes X \oplus A^{(k)} \otimes B.$$
   En déduire que $A^* \otimes B$ est la plus petite solution de (1).
5. On se place maintenant dans $(\mathbb{R}_{\min}, \min, +)$, et on suppose que le graphe associé à A n'a pas de cycle de poids > 0. Montrer que $A^* \otimes B$ est l'unique solution de (1).
6. Le résultat précédent est-il valable dans n'importe quel dioïde idempotent ? Le prouver, ou donner un contre-exemple si ce n'est pas le cas. (*N.B. : attention à la formulation dans le cas général !*)
7. Quelle propriété de $\mathbb{R}_{\min}$ permet la preuve ? En trouver l'équivalent (et prouver le résultat) dans un dioïde idempotent S quelconque.

Plus courts chemins

Exercice 3. Dans cet exercice on s'intéresse à déterminer les k meilleurs chemins entre deux sommets donnés. Nous considérons l'ensemble suivant :

$$S = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k_{\min} \mid x_1 \leq \ldots \leq x_k\}$$

On définit l'opération $\oplus$ de manière suivante : si $x \in (x_1, \ldots, x_k)$ et $y \in (y_1, \ldots, y_k)$, alors $x \oplus y = (z_1, \ldots, z_k)$ où z_i est le i-ème plus petit élément de l'ensemble $\{x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots\}$. L'opération $\otimes$ est définie par $x \otimes y = (z_1, \ldots, z_k)$ où z_i est le i-ème plus petits termes de la forme $x_i + y_j$ avec $i, j \in \{1, \ldots, k\}$.

1. Quelle est la complexité de calcul des opérations $\oplus$ et $\otimes$ exprimée en nombre d'opérations élémentaires (addition, comparaison) ? En déduire la complexité des opérations correspondantes dans $\mathcal{M}_n(S)$.

   N.B. : on ne demande pas de prouver la complexité exacte, simplement le meilleur algorithme que vous pourrez trouver.
2. Montrer que $(S, \oplus, \otimes)$ est un semi-anneau et donner ses éléments nul et neutre. Est-ce que c'est un dioïde ? idempotent ? sélectif ?
3. Soit $u \in S$ tel que toutes les composantes de u sont strictement positives. Montrer que u est $(k-1)$-régulier (i.e. $u^{(k-1)} = u^{(k)}$).
4. On veut construire une matrice A telle que le calcul de A^* permette d'obtenir les poids des k meilleurs chemins entre deux sommets donnés. Que faut-il choisir comme coefficients A_{ij} ?
5. Montrer que si tous les cycles sont de poids strictement positif, il existe $n_k \in \mathbb{N}$ tel que $A^* = A^{(n_k)}$.
6. Proposer un algorithme pour déterminer les k meilleurs chemins vers un sommet i depuis tous les sommets $j \neq i$. Quelle est la complexité de cet algorithme ?
7. (Bonus) Soit w^* le poids optimal, i.e., le poids du chemin ayant le poids le plus faible. On fixe $\eta > 0$ et l'on dit qu'un chemin est quasi-optimal si son poids est inférieur ou égal à $w^* + \eta$. En s'inspirant du problème de k meilleurs chemins, proposer un modèle algébrique pour déterminer les poids de tous les chemins quasi-optimaux. Notons que l'on ne connaît pas *a priori* la valeur de w^*.
8. (Bonus) Peut-t-on en déduire un algorithme pour calculer le poids de tous les chemins quasi-optimaux en temps fini ? Combien d'itérations cet algorithme nécessite-t-il ?