

Modèles et algorithmes des réseaux

# Routage distribué

## et les algorithmes de plus court chemin

Ana Busic

Inria Paris - DI ENS

`http://www.di.ens.fr/~busic/`  
`ana.busic@inria.fr`

Paris, Septembre 2018

# Plan

Rappel sur les algorithmes de plus court chemin

Bellman-Ford distribué

Modèle algébrique

Le semi-anneau  $(\min, +)$

Monoïdes, semi-anneaux, dioïdes. . .

Routage - une approche algébrique

# Rappel sur les algorithmes de plus court chemin

$G = (V, \mathcal{A}, w)$  un graphe dirigé ; poids sur les arcs,  $w : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ .

On cherche à calculer le plus court chemin de tous les sources vers une destination fixée  $i \in V$ .

# Rappel sur les algorithmes de plus court chemin

$G = (V, \mathcal{A}, w)$  un graphe dirigé ; poids sur les arcs,  $w : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ .

On cherche à calculer le plus court chemin de tous les sources vers une destination fixée  $i \in V$ .

- ▶ **Dijkstra** (toutes les sources vers une dest. ; iteration sur les poids de chemins)
- ▶ **Bellman-Ford** (toutes les sources vers une dest. ; iteration sur le nombre d'arcs de chemins)
- ▶ **Floyd-Warshall** (toutes les sources vers toutes dest. ; iteration sur l'ensemble d'arcs autorisés)

# Dijkstra

---

## Algorithme 1 : Dijkstra

---

**Données :**  $G = (V, \mathcal{A}, w)$ ,  $w \geq 0$ ;

**Résultat :**  $d : V \rightarrow \mathbb{R}$  les longueurs des chemins les plus courts de tous les sommets vers  $i$ ;

$\pi : V \rightarrow \mathbb{R}$  le premier sommet d'un chemin le plus court vers  $i$ ;

**début**

```

     $d(k) \leftarrow \begin{cases} 0 & \text{si } k = i \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad /* \text{initialiser avec un majorant } */ ;$ 
     $Q \leftarrow V ;$ 
    tant que  $Q \neq \emptyset$  faire
         $k \leftarrow \operatorname{argmin}(d(j), j \in Q) ;$ 
         $Q \leftarrow Q \setminus \{k\} ;$ 
        pour chaque  $j \in V$  tel que  $(j, k) \in \mathcal{A}$  faire
            si  $d(j) > d(k) + w(j, k)$  alors
                 $\pi(j) \leftarrow k ;$ 
                 $d(j) \leftarrow d(k) + w(j, k) ;$ 
            fin
        fin
    fin
fin
```

---

## Implementation :

- ▶ avec un tableau :  $O(|V|^2)$ ;
- ▶ avec un tas :  $O((|\mathcal{A}| + |V|) \log |V|)$ ;
- ▶ avec un tas de Fibonacci :  $O(|\mathcal{A}| + |V| \log |V|)$ .

# Bellman-Ford

---

## Algorithme 2 : Bellman-Ford

---

**Données** :  $G = (V, \mathcal{A}, w)$  qui n'admet pas de circuit de poids négatif;

**Résultat** :  $d : V \rightarrow \mathbb{R}$  les longueurs des chemins les plus courts de tous les sommets vers  $i$ ;

$\pi : V \rightarrow \mathbb{R}$  le premier sommet d'un chemin le plus court vers  $i$ ;

**début**

```
 $d(k) \leftarrow \begin{cases} 0 & \text{si } k = i \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad /* \text{initialiser avec un majorant} */ ;$ 
```

```
modified  $\leftarrow$  1; iter  $\leftarrow$  1;
```

```
tant que modified  $\neq$  0 and iter  $\leq$  |V| faire
```

```
    modified  $\leftarrow$  0, iter  $\leftarrow$  iter + 1;
```

```
    pour chaque  $(j, k) \in \mathcal{A}$  faire
```

```
        si  $d(j) > d(k) + w(j, k)$  alors
```

```
            modified  $\leftarrow$  1;
```

```
             $\pi(j) \leftarrow k$ ;
```

```
             $d(j) \leftarrow d(k) + w(j, k)$ ;
```

```
        fin
```

```
    fin
```

```
fin
```

```
si modified  $\neq$  0 alors retourner "il y a un cycle de poids négatif";
```

```
fin
```

---

Implementation :  $O(|\mathcal{A}||V|)$ .

# Floyd-Warshall

---

## Algorithme 3 : Floyd-Warshall

---

**Données :**  $G = (V, \mathcal{A}, w)$  qui n'admet pas de circuit de poids négatif ;  
 $V = \{1, \dots, n\}$

**Résultat :**  $d^n : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  les longueurs des chemins les plus courts pour tous les couples de sommets;

début

$d^0(i, j) \leftarrow \begin{cases} w(i, j) & \text{si } (i, j) \in \mathcal{A} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} ;$

**pour**  $k = 1..n$  **faire**

**pour**  $i = 1..n$  **faire**

**pour**  $j = 1..n$  **faire**

$d^k(i, j) \leftarrow \min\{d^{k-1}(i, j), d^{k-1}(i, k) + d^{k-1}(k, j)\} ;$

**fin**

**fin**

**fin**

**fin**

---

Implementation :  $O(|V|^3)$ .

# Equation de Bellman

Point commun de ces trois algorithmes est la relaxation :

$$d(j) \leftarrow \min_k \{d(j), d(k) + w(j, k)\}$$

ou

$$d(i, j) \leftarrow \min_k \{d(i, j), d(i, k) + d(k, j)\}$$

Notation :  $d_j = d(j)$  ;  $w_{ij} = w(i, j)$  ; et on note la destination par 1.

On cherche la solution de l'équation de Bellman :

$$\begin{aligned}d_j &= \min_{k \in \mathcal{N}(j)} [w_{jk} + d_k], \quad j \neq i \\d_1 &= 0\end{aligned}$$

Si tous les cycles de poids  $> 0$

- ▶ Equation de Bellman a une **unique solution**.
- ▶ Construction des plus courts chemins à partir de la solution.

# Equation de Bellman

Hypothèse : tous les circuits de poids  $> 0$ .

Construction des plus courts chemins

- ▶ Pour chaque  $j \neq i$  prendre un arc dans  $\arg \min$  - un sous-graphe de  $N - 1$  arcs.

# Equation de Bellman

Hypothèse : tous les circuits de poids  $> 0$ .

## Construction des plus courts chemins

- ▶ Pour chaque  $j \neq i$  prendre un arc dans  $\arg \min$  - un sous-graphe de  $N - 1$  arcs.
- ▶ Ce sous-graphe ne contient pas de circuits.  
Dém. soit  $(j_1, j_2, \dots, j_m, j_1)$  un circuit dans le sous-graphe. Alors (avec  $m + 1 := 1$ )

$$d_{j_k} = w_{j_k j_{k+1}} + d_{j_{k+1}}, 1 \leq k \leq m.$$

On obtient  $w_{j_1 j_2} + \dots + w_{j_m j_1} = 0$ , ce qui est une contradiction.

# Equation de Bellman

Hypothèse : tous les circuits de poids  $> 0$ .

## Construction des plus courts chemins

- ▶ Pour chaque  $j \neq i$  prendre un arc dans  $\arg \min$  - un sous-graphe de  $N - 1$  arcs.
- ▶ Ce sous-graphe ne contient pas de circuits.  
Dém. soit  $(j_1, j_2, \dots, j_m, j_1)$  un circuit dans le sous-graphe. Alors (avec  $m + 1 := 1$ )

$$d_{j_k} = w_{j_k j_{k+1}} + d_{j_{k+1}}, 1 \leq k \leq m.$$

On obtient  $w_{j_1 j_2} + \dots + w_{j_m j_1} = 0$ , ce qui est une contradiction.

- ▶ Plus court chemin de  $j$  à 1 : suivre les arcs dans ce sous-graphe.

# Equation de Bellman

**Prop.** Equation de Bellman a une **unique solution** si tous les cycles de poids  $> 0$ .

**Dém.** Notation :  $N = |V|$ . Soit  $d' = (d'_1, \dots, d'_N)$ , avec  $d'_1 = 0$  une autre solution de l'équation. Alors on va montrer que  $d' = d$  où  $d$  sont les longueurs des plus courts chemins.

# Equation de Bellman

**Prop.** Equation de Bellman a une **unique solution** si tous les cycles de poids  $> 0$ .

**Dém.** Notation :  $N = |V|$ . Soit  $d' = (d'_1, \dots, d'_N)$ , avec  $d'_1 = 0$  une autre solution de l'équation. Alors on va montrer que  $d' = d$  où  $d$  sont les longueurs des plus courts chemins.

- ▶ Construction des chemins en partant de la solution  $d'$  :  $d'_j$  est la longueur du chemin de  $j$  à 1 dans le sous graphe obtenu.  
Donc  $d'_j \geq d_j, \forall j$ .

# Equation de Bellman

**Prop.** Equation de Bellman a une **unique solution** si tous les cycles de poids  $> 0$ .

**Dém.** Notation :  $N = |V|$ . Soit  $d' = (d'_1, \dots, d'_N)$ , avec  $d'_1 = 0$  une autre solution de l'équation. Alors on va montrer que  $d' = d$  où  $d$  sont les longueurs des plus courts chemins.

- ▶ Construction des chemins en partant de la solution  $d'$  :  $d'_j$  est la longueur du chemin de  $j$  à 1 dans le sous graphe obtenu.  
Donc  $d'_j \geq d_j, \forall j$ .
- ▶ Deux executions de l'algorithme BF avec conditions initiales :
  - ▶ Algo A :  $d'(0) = d'$  ;
  - ▶ Algo B :  $d_j(0) = \infty, j \neq 1, d_1(0) = 0$ .

# Equation de Bellman

**Prop.** Equation de Bellman a une **unique solution** si tous les cycles de poids  $> 0$ .

**Dém.** Notation :  $N = |V|$ . Soit  $d' = (d'_1, \dots, d'_N)$ , avec  $d'_1 = 0$  une autre solution de l'équation. Alors on va montrer que  $d' = d$  où  $d$  sont les longueurs des plus courts chemins.

- ▶ Construction des chemins en partant de la solution  $d'$  :  $d'_j$  est la longueur du chemin de  $j$  à 1 dans le sous graphe obtenu.  
Donc  $d'_j \geq d_j, \forall j$ .
- ▶ Deux executions de l'algorithme BF avec conditions initiales :
  - ▶ Algo A :  $d'(0) = d'$  ;
  - ▶ Algo B :  $d_j(0) = \infty, j \neq 1, d_1(0) = 0$ .

On a  $d(k) \geq d'(k) = d', \forall k$ , donc  $d \geq d'$ .

- ▶ Donc  $d' = d$ .

# Bellman-Ford distribué

## Hypothèses

- ▶ les cycles de poids  $> 0$
- ▶ le réseau reste fortement connexe
- ▶ les  $w_{ij}$  ne changent pas après  $t_0$   
(changements plus lents que le calcul BF)

**Notation :**  $\mathcal{N}(i) = \{j \in V : (i, j) \in \mathcal{A}\}$  les voisins sortants de  $i$ .

On cherche la solution de l'équation de Bellman :

$$\begin{aligned}d_i &= \min_{j \in \mathcal{N}(i)} [w_{ij} + d_j], \quad i \neq 1 \\d_1 &= 0\end{aligned}$$

**Prop.** Equation de Bellman a une **unique solution** si tous les cycles de poids  $> 0$ .

# Bellman-Ford distribué

## Iteration de Bellman-Ford

$$d_i(k+1) = \min_{j \in \mathcal{N}(i)} [w_{ij} + d_j(k)], \quad i \neq 1$$

$$d_1(k+1) = 0$$

Convergence pour :  $d_i(0) = +\infty, i \neq 1; d_1(0) = 0$

## Variantes distribués

- ▶ **synchrone** - besoin de commencer l'algo au même temps ; interrompre si les liens changent
- ▶ **asynchrone** - pas besoin de conditions initiales particulières (1969 ARPANET échange 625 msec de manière asynchrone)
  - ▶ de temps en temps les nœuds  $i \neq 1$  calculent  $d_i = \min_{j \in \mathcal{N}(i)} [w_{ij} + d_j]$  en utilisant les dernières estimations pour les  $d_j$  et les  $w_{ij}$
  - ▶ les nœuds  $i$  envoient les  $d_i$  au voisins

# Algorithmme

Le nœud  $i \neq 1$  connaît à la date  $t$  :

- ▶  $d_i(t)$  estimateur de sa propre distance
- ▶  $d_j^i(t)$  estimateur de  $d_j$  connu par  $i$  pour tous les  $j \in \mathcal{N}(i)$

On suppose que :

- ▶  $d_1(t) = 0, t \geq t_0$
- ▶ Pour tout  $i$  tq.  $1 \in \mathcal{N}(i)$ ,  $d_1^i(t) = 0, t \geq t_0$

Algorithmme

1. Mise à jour de l'estimateur  $d_i(t) = \min_{j \in \mathcal{N}(i)} [w_{ij} + d_j^i]$  et l'envoi au voisins  $k$  tq.  $i \in \mathcal{N}(k)$
2. Reception et mise à jour des  $d_j^i$

Notation :

- ▶  $T^i$  les instants de mise à jour des  $d_i$
- ▶  $T_j^i$  les instants de mise à jour des  $d_j^i$

# Algorithmme

## Hypothèses

- ▶  $\sup\{t \in T^i\} = \infty, \sup\{t \in T_j^i\} = \infty, \forall ij$
- ▶ les anciens estimateurs sont reçus en temps fini :  $\forall t \geq t_0 \exists t' \geq t$  tel que toute information calculée avant  $t$  est reçue avant  $t'$

**Thm.** Si tous les cycles sont de poids  $> 0$ , alors pour une condition initiale  $d_i(t_0), d_j^i(t_0)$  quelconque, l'algorithmme asynchrone converge en un temps fini vers l'unique point fixe de l'équation de Bellman.

# Démonstration

Construction de deux suites  $\{\underline{d}^k\}$  et  $\{\bar{d}^k\}$  t.q.

$$\underline{d}_i^k \leq \underline{d}^{k+1} \leq d_i \leq \bar{d}_i^{k+1} \leq \bar{d}_i^k, \quad \forall i, \forall k \quad (1)$$

et

$$\underline{d}_i^k = d_i = \bar{d}_i^k, \quad \forall k \text{ suffis. grand} \quad (2)$$

# Démonstration

Construction de deux suites  $\{\underline{d}^k\}$  et  $\{\bar{d}^k\}$  t.q.

$$\underline{d}_i^k \leq \underline{d}^{k+1} \leq d_i \leq \bar{d}_i^{k+1} \leq \bar{d}_i^k, \quad \forall i, \forall k \quad (1)$$

et

$$\underline{d}_i^k = d_i = \bar{d}_i^k, \quad \forall k \text{ suffis. grand} \quad (2)$$

## Monotonie de l'iteration

- ▶ Si  $d'_j \geq d''_j$ ,  $\forall j \in \mathcal{N}(i)$ , alors

$$\min_{j \in \mathcal{N}(i)} [w_{ij} + d'_j] \geq \min_{j \in \mathcal{N}(i)} [w_{ij} + d''_j]$$

# Démonstration

Construction de deux suites  $\{\underline{d}^k\}$  et  $\{\bar{d}^k\}$  t.q.

$$\underline{d}_i^k \leq \underline{d}^{k+1} \leq d_i \leq \bar{d}_i^{k+1} \leq \bar{d}_i^k, \quad \forall i, \forall k \quad (1)$$

et

$$\underline{d}_i^k = d_i = \bar{d}_i^k, \quad \forall k \text{ suffis. grand} \quad (2)$$

## Monotonie de l'iteration

- ▶ Si  $d_j' \geq d_j''$ ,  $\forall j \in \mathcal{N}(i)$ , alors

$$\min_{j \in \mathcal{N}(i)} [w_{ij} + d_j'] \geq \min_{j \in \mathcal{N}(i)} [w_{ij} + d_j'']$$

- ▶ Si  $d_i^1 \geq d_i^0$ ,  $\forall i$ , alors  $d_i^{k+1} \geq d_i^k$ ,  $\forall i, \forall k$   
Si  $d_i^1 \leq d_i^0$ ,  $\forall i$ , alors  $d_i^{k+1} \leq d_i^k$ ,  $\forall i, \forall k$

# Démonstration

Construction de deux suites  $\{\underline{d}^k\}$  et  $\{\bar{d}^k\}$  t.q.

$$\underline{d}_i^k \leq \underline{d}^{k+1} \leq d_i \leq \bar{d}_i^{k+1} \leq \bar{d}_i^k, \quad \forall i, \forall k \quad (1)$$

et

$$\underline{d}_i^k = d_i = \bar{d}_i^k, \quad \forall k \text{ suffis. grand} \quad (2)$$

## Monotonie de l'iteration

- ▶ Si  $d_j' \geq d_j''$ ,  $\forall j \in \mathcal{N}(i)$ , alors

$$\min_{j \in \mathcal{N}(i)} [w_{ij} + d_j'] \geq \min_{j \in \mathcal{N}(i)} [w_{ij} + d_j'']$$

- ▶ Si  $d_i^1 \geq d_i^0$ ,  $\forall i$ , alors  $d_i^{k+1} \geq d_i^k$ ,  $\forall i, \forall k$   
Si  $d_i^1 \leq d_i^0$ ,  $\forall i$ , alors  $d_i^{k+1} \leq d_i^k$ ,  $\forall i, \forall k$

Suite  $\{\bar{d}^k\}$  : BF synchrone pour  $\bar{d}_i^0 = \infty$ ,  $i \neq 1$ ,  $\bar{d}_1 = 0$ .

# Démonstration

Suite  $\{\underline{d}^k\}$  :

$$\underline{d}_i^0 = d_i - \delta, \quad \forall i \neq 1$$

$$\underline{d}_1^0 = 0$$

où  $\delta$  suff. petit pour que  $\underline{d}_i^0 \leq \min\{d_i(t_0), d_i^j(t_0), i \in \mathcal{N}(j)\}$  et aussi de tous les estimateurs de  $d_i$  qui ont été calculés avant  $t_0$  et qui vont être reçus après  $t_0$ .

# Démonstration

Suite  $\{\underline{d}^k\}$  :

$$\underline{d}_i^0 = d_i - \delta, \quad \forall i \neq 1$$

$$\underline{d}_1^0 = 0$$

où  $\delta$  suff. petit pour que  $\underline{d}_i^0 \leq \min\{d_i(t_0), d_i^j(t_0), i \in \mathcal{N}(j)\}$  et aussi de tous les estimateurs de  $d_i$  qui ont été calculés avant  $t_0$  et qui vont être reçus après  $t_0$ .

**Remarque :** si tous les arcs de poids  $\geq 0$ , alors  $d_i \geq 0$ , sinon  $d_i \geq (N - 1)\gamma$  où  $\gamma$  est le plus petit poids  $< 0$ .

# Démonstration

Suite  $\{\underline{d}^k\}$  :

$$\underline{d}_i^0 = d_i - \delta, \quad \forall i \neq 1$$

$$\underline{d}_1^0 = 0$$

où  $\delta$  suff. petit pour que  $\underline{d}_i^0 \leq \min\{d_i(t_0), d_i^j(t_0), i \in \mathcal{N}(j)\}$  et aussi de tous les estimateurs de  $d_i$  qui ont été calculés avant  $t_0$  et qui vont être reçus après  $t_0$ .

**Remarque :** si tous les arcs de poids  $\geq 0$ , alors  $d_i \geq 0$ , sinon  $d_i \geq (N-1)\gamma$  où  $\gamma$  est le plus petit poids  $< 0$ .

- ▶ Monotonie et le choix de condition initiales impliquent (1)

$$\underline{d}_i^k \leq \underline{d}_i^{k+1} \leq d_i \leq \bar{d}_i^{k+1} \leq \bar{d}_i^k, \quad \forall i, \forall k$$

- ▶ Il reste à prouver (2) :  $\underline{d}_i^k = d_i = \bar{d}_i^k, \quad \forall k$  suffis. grand  
 $\bar{d}_i^k = d_i, \quad k \geq N-1$  (de cvg. BF centralisé)

# Démonstration

Il reste à montrer  $\underline{d}_i^k = d_i$ ,  $\forall k$  suffis. grand

# Démonstration

Il reste à montrer  $\underline{d}_i^k = d_i$ ,  $\forall k$  suffis. grand

**Observation :**  $\underline{d}_i^k$  est le poids d'un chemin  $\pi_i^k$  de  $i$  vers un  $j$  avec au plus  $k$  arcs +  $\underline{d}_j^0$

# Démonstration

Il reste à montrer  $\underline{d}_i^k = d_i$ ,  $\forall k$  suffis. grand

**Observation :**  $\underline{d}_i^k$  est le poids d'un chemin  $\pi_i^k$  de  $i$  vers un  $j$  avec au plus  $k$  arcs +  $\underline{d}_j^0$

**Notation :**

- ▶  $L(i, k)$  poids de  $\pi_i^k$
- ▶  $n(i, k)$  nb. de arcs de  $\pi_i^k$

# Démonstration

Il reste à montrer  $\underline{d}_i^k = d_i$ ,  $\forall k$  suffis. grand

**Observation :**  $\underline{d}_i^k$  est le poids d'un chemin  $\pi_i^k$  de  $i$  vers un  $j$  avec au plus  $k$  arcs +  $\underline{d}_j^0$

**Notation :**

- ▶  $L(i, k)$  poids de  $\pi_i^k$
- ▶  $n(i, k)$  nb. de arcs de  $\pi_i^k$

Chemin  $\pi_i^k$  :

- ▶ chemin simple de  $i$  vers  $j$  ( $\leq N - 1$  arcs) + circuits de poids  $> 0$

# Démonstration

Il reste à montrer  $\underline{d}_i^k = d_i$ ,  $\forall k$  suffis. grand

**Observation :**  $\underline{d}_i^k$  est le poids d'un chemin  $\pi_i^k$  de  $i$  vers un  $j$  avec au plus  $k$  arcs +  $\underline{d}_j^0$

**Notation :**

- ▶  $L(i, k)$  poids de  $\pi_i^k$
- ▶  $n(i, k)$  nb. de arcs de  $\pi_i^k$

Chemin  $\pi_i^k$  :

- ▶ chemin simple de  $i$  vers  $j$  ( $\leq N - 1$  arcs) + circuits de poids  $> 0$
- ▶ Si  $\lim_{k \rightarrow \infty} n(i, k) = \infty$  pour un  $i$ , alors  $\lim_{k \rightarrow \infty} L(i, k) = \infty$ .

# Démonstration

Il reste à montrer  $\underline{d}_i^k = d_i$ ,  $\forall k$  suffis. grand

**Observation :**  $\underline{d}_i^k$  est le poids d'un chemin  $\pi_i^k$  de  $i$  vers un  $j$  avec au plus  $k$  arcs +  $\underline{d}_j^0$

**Notation :**

- ▶  $L(i, k)$  poids de  $\pi_i^k$
- ▶  $n(i, k)$  nb. de arcs de  $\pi_i^k$

Chemin  $\pi_i^k$  :

- ▶ chemin simple de  $i$  vers  $j$  ( $\leq N - 1$  arcs) + circuits de poids  $> 0$
- ▶ Si  $\lim_{k \rightarrow \infty} n(i, k) = \infty$  pour un  $i$ , alors  $\lim_{k \rightarrow \infty} L(i, k) = \infty$ .

Contradiction, car  $d_i \geq \underline{d}_i^k = L(i, k) + \underline{d}_j^0$  pour un  $j$  et  $d_i < \infty$  (fortement connexe).

# Démonstration

Il reste à montrer  $\underline{d}_i^k = d_i$ ,  $\forall k$  suffis. grand

**Observation :**  $\underline{d}_i^k$  est le poids d'un chemin  $\pi_i^k$  de  $i$  vers un  $j$  avec au plus  $k$  arcs +  $\underline{d}_j^0$

**Notation :**

- ▶  $L(i, k)$  poids de  $\pi_i^k$
- ▶  $n(i, k)$  nb. de arcs de  $\pi_i^k$

Chemin  $\pi_i^k$  :

- ▶ chemin simple de  $i$  vers  $j$  ( $\leq N - 1$  arcs) + circuits de poids  $> 0$
- ▶ Si  $\lim_{k \rightarrow \infty} n(i, k) = \infty$  pour un  $i$ , alors  $\lim_{k \rightarrow \infty} L(i, k) = \infty$ .

Contradiction, car  $d_i \geq \underline{d}_i^k = L(i, k) + \underline{d}_j^0$  pour un  $j$  et  $d_i < \infty$  (fortement connexe).

- ▶ Donc le nombre de valeurs possibles de  $\underline{d}_i^k$ ,  $k \geq 0$ ,  $i \geq 1$  est fini.

# Démonstration

Il reste à montrer  $\underline{d}_i^k = d_i$ ,  $\forall k$  suffis. grand

**Observation :**  $\underline{d}_i^k$  est le poids d'un chemin  $\pi_i^k$  de  $i$  vers un  $j$  avec au plus  $k$  arcs +  $\underline{d}_j^0$

**Notation :**

- ▶  $L(i, k)$  poids de  $\pi_i^k$
- ▶  $n(i, k)$  nb. de arcs de  $\pi_i^k$

Chemin  $\pi_i^k$  :

- ▶ chemin simple de  $i$  vers  $j$  ( $\leq N - 1$  arcs) + circuits de poids  $> 0$
- ▶ Si  $\lim_{k \rightarrow \infty} n(i, k) = \infty$  pour un  $i$ , alors  $\lim_{k \rightarrow \infty} L(i, k) = \infty$ .

Contradiction, car  $d_i \geq \underline{d}_i^k = L(i, k) + \underline{d}_j^0$  pour un  $j$  et  $d_i < \infty$  (fortement connexe).

- ▶ Donc le nombre de valeurs possibles de  $\underline{d}_i^k$ ,  $k \geq 0$ ,  $i \geq 1$  est fini.
- ▶  $\underline{d}_i^k$  décroît de manière monotone en  $k$  pour tout  $i$

# Démonstration

Il reste à montrer  $\underline{d}_i^k = d_i$ ,  $\forall k$  suffis. grand

**Observation :**  $\underline{d}_i^k$  est le poids d'un chemin  $\pi_i^k$  de  $i$  vers un  $j$  avec au plus  $k$  arcs +  $\underline{d}_j^0$

**Notation :**

- ▶  $L(i, k)$  poids de  $\pi_i^k$
- ▶  $n(i, k)$  nb. de arcs de  $\pi_i^k$

Chemin  $\pi_i^k$  :

- ▶ chemin simple de  $i$  vers  $j$  ( $\leq N - 1$  arcs) + circuits de poids  $> 0$
- ▶ Si  $\lim_{k \rightarrow \infty} n(i, k) = \infty$  pour un  $i$ , alors  $\lim_{k \rightarrow \infty} L(i, k) = \infty$ .

Contradiction, car  $d_i \geq \underline{d}_i^k = L(i, k) + \underline{d}_j^0$  pour un  $j$  et  $d_i < \infty$  (fortement connexe).

- ▶ Donc le nombre de valeurs possibles de  $\underline{d}_i^k$ ,  $k \geq 0$ ,  $i \geq 1$  est fini.
- ▶  $\underline{d}_i^k$  décroît de manière monotone en  $k$  pour tout  $i$   
 $\Rightarrow \exists k$  t.q.  $\underline{d}_i^{k+1} = \underline{d}_i^k$ ,  $\forall i$ , i.e.  $\underline{d}^k$  est une solution de l'équation de Bellman. Unicité implique  $\underline{d}^k = d$ .

# Démonstration

Fin de la preuve :

Montrer (par récurrence) que  $\forall k, \exists t(k)$  t.q. pour tout  $t \geq t(k)$ ,

$$\underline{d}_i^k \leq d_i(t) \leq \bar{d}_i^k, \forall i$$

$$\underline{d}_j^k \leq d_j^i(t) \leq \bar{d}_j^k, \forall i, j \in \mathcal{N}(i)$$

et pour tout  $t \in T_j^i, t \geq t(k)$ ,

$$\underline{d}_j^k \leq d_j(\tau_j^i(t)) \leq \bar{d}_j^k, \forall i, j \in \mathcal{N}(i)$$

où  $\tau_j^i(t) = \max\{s \leq t \mid s \in T_j^i \text{ et } d_j(s) = d_j^i(t)\}$ .

# Démonstration

Fin de la preuve :

Montrer (par récurrence) que  $\forall k, \exists t(k)$  t.q. pour tout  $t \geq t(k)$ ,

$$\underline{d}_i^k \leq d_i(t) \leq \bar{d}_i^k, \forall i$$

$$\underline{d}_j^k \leq d_j^i(t) \leq \bar{d}_j^k, \forall i, j \in \mathcal{N}(i)$$

et pour tout  $t \in T_j^i, t \geq t(k)$ ,

$$\underline{d}_j^k \leq d_j(\tau_j^i(t)) \leq \bar{d}_j^k, \forall i, j \in \mathcal{N}(i)$$

où  $\tau_j^i(t) = \max\{s \leq t \mid s \in T_j^i \text{ et } d_j(s) = d_j^i(t)\}$ .

- ▶  $t'(k)$  : plus petit temps t.q. tous les nœuds ont calculés au moins une itération
- ▶  $t(k+1)$  : tous les messages calculés avant  $t'(k)$  ont été reçus et au moins un par estimateur, calculé après  $t'(k)$

# Rappels d'algèbre

- ▶ **Semi-groupe** : un ensemble  $E$  muni d'une loi de composition (binaire) interne associative  $\oplus$  :

$$a \oplus b \in E \quad \forall a, b \in E$$
$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) \quad \forall a, b, c \in E.$$

Si  $\oplus$  est commutative, alors  $(E, \oplus)$  est un **semi-groupe commutatif**.

L'**élément neutre**  $\epsilon$  d'un semi-groupe  $(E, \oplus)$ , est défini par la propriété :  $\epsilon \oplus x = x \oplus \epsilon = x$ ,  $\forall x \in E$ .

Si un semi-groupe possède un élément neutre  $\epsilon$ , alors cet **élément neutre est unique**.

*Démonstration* : Si  $\epsilon'$  était un autre élément neutre, on aurait  $\epsilon \oplus \epsilon' = \epsilon = \epsilon'$ .

- ▶ **Monoïde** : un semi-groupe muni d'un élément neutre.  
Un élément  $x$  d'un monoïde  $(E, \oplus)$  admet un **inverse** s'il existe un élément  $x'$  tel que  $x \oplus x' = x' \oplus x = \epsilon$ .
- ▶ **Groupe** : un monoïde dans lequel tout élément a un inverse.

# Rappels d'algèbre

- ▶ **Semi-anneau** : une structure algébrique  $(E, \oplus, \otimes)$  formée d'un ensemble  $E$  et de deux lois de composition internes telles que :
  1.  $(E, \oplus)$  est un monoïde commutatif (avec l'élément neutre noté  $\epsilon$ ),
  2.  $(E, \otimes)$  est un monoïde (avec l'élément neutre noté  $e$ ),
  3. l'élément neutre de  $(E, \oplus)$  est un élément absorbant pour  $\otimes$ , c.à.d. :

$$\forall a \in E : a \otimes \epsilon = \epsilon \otimes a = \epsilon,$$

4.  $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c) \forall a, b, c \in E$  (distributivité à gauche),  
 $(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c) \forall a, b, c \in E$  (distributivité à droite).
- ▶ **Anneau** : un semi-anneau  $(E, \oplus, \otimes)$  dans lequel  $(E, \oplus)$  est un groupe commutatif.
  - ▶ **Corps** : un anneau  $(E, \oplus, \otimes)$  dans lequel  $(E, \otimes)$  est un groupe. Lorsque  $\otimes$  est commutative, on parle de corps commutatif.

# Le semi-anneau $(\min, +)$

## Définition et propriétés

Notation :  $\mathbb{R}_{\min} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ,  $\oplus = \min$ ,  $\otimes = +$

$(\mathbb{R}_{\min}, \min, +)$  est un **semi-anneau**

# Le semi-anneau $(\min, +)$

## Définition et propriétés

Notation :  $\mathbb{R}_{\min} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ,  $\oplus = \min$ ,  $\otimes = +$

$(\mathbb{R}_{\min}, \min, +)$  est un **semi-anneau**

- ▶ Element nul ( $\oplus$ ) :  $\epsilon = +\infty$
- ▶ Element neutre ( $\otimes$ ) :  $e = 0$

# Le semi-anneau $(\min, +)$

## Définition et propriétés

Notation :  $\mathbb{R}_{\min} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ,  $\oplus = \min$ ,  $\otimes = +$

$(\mathbb{R}_{\min}, \min, +)$  est un **semi-anneau**

- ▶ Element nul ( $\oplus$ ) :  $\epsilon = +\infty$
- ▶ Element neutre ( $\otimes$ ) :  $e = 0$
- ▶  $\epsilon$  est absorbant pour  $\otimes$  :

$$\forall a \in \mathbb{R}_{\min}, \epsilon \otimes a = \epsilon \quad [+\infty + a = +\infty]$$

# Le semi-anneau $(\min, +)$

## Définition et propriétés

Notation :  $\mathbb{R}_{\min} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ,  $\oplus = \min$ ,  $\otimes = +$

$(\mathbb{R}_{\min}, \min, +)$  est un **semi-anneau**

- ▶ Element nul ( $\oplus$ ) :  $\epsilon = +\infty$
- ▶ Element neutre ( $\otimes$ ) :  $e = 0$
- ▶  $\epsilon$  est absorbant pour  $\otimes$  :

$$\forall a \in \mathbb{R}_{\min}, \epsilon \otimes a = \epsilon \quad [+\infty + a = +\infty]$$

**Exercice** : Calculer  $3^{\otimes 4}$ ,  $3 \otimes 2 \oplus 6$ ,  $\sqrt{\otimes} 6$ .

# Le semi-anneau $(\min, +)$

Matrices  $(\min, +)$

$(\mathbb{R}_{\min}^{n \times n}, \oplus, \otimes)$  où pour  $A, B \in \mathbb{R}_{\min}^{n \times n}$ ,

$$(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$$

$$(A \otimes B)_{ij} = \oplus_k A_{ik} \otimes B_{kj}$$

Matrice identité :

$$I_n = \begin{bmatrix} e & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \ddots & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & +\infty & +\infty \\ +\infty & \ddots & +\infty \\ +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$$

Propriété :  $(\mathbb{R}_{\min}^{n \times n}, \oplus, \otimes)$  est un semi-anneau.

# Le semi-anneau $(\min, +)$

Lien avec les algorithmes de plus court chemin

$G = (V, \mathcal{A})$  un graphe orienté avec  $V = \{1, \dots, n\}$  et  $w : V \rightarrow \mathbb{R}$ .

On représente le graphe pondéré par une matrice  $A$ ,

$$A_{ij} = \begin{cases} w_{ij}, & (i,j) \in \mathcal{A} \\ +\infty, & (i,j) \notin \mathcal{A} \end{cases}$$

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} \infty & 1 & 5 \\ 0 & \infty & 2 \\ \infty & 3 & \infty \end{bmatrix}$$

# Le semi-anneau $(\min, +)$

Lien avec les algorithmes de plus court chemin

$G = (V, \mathcal{A})$  un graphe orienté avec  $V = \{1, \dots, n\}$  et  $w : V \rightarrow \mathbb{R}$ .

On représente le graphe pondéré par une matrice  $A$ ,

$$A_{ij} = \begin{cases} w_{ij}, & (i,j) \in \mathcal{A} \\ +\infty, & (i,j) \notin \mathcal{A} \end{cases}$$

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} \infty & 1 & 5 \\ 0 & \infty & 2 \\ \infty & 3 & \infty \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 3 \\ \infty & 1 & 5 \\ 3 & \infty & 5 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 10 \\ 1 & 8 & 3 \\ \infty & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

# Le semi-anneau $(\min, +)$

Lien avec les algorithmes de plus court chemin

$G = (V, \mathcal{A})$  un graphe orienté avec  $V = \{1, \dots, n\}$  et  $w : V \rightarrow \mathbb{R}$ .

On représente le graphe pondéré par une matrice  $A$ ,

$$A_{ij} = \begin{cases} w_{ij}, & (i, j) \in \mathcal{A} \\ +\infty, & (i, j) \notin \mathcal{A} \end{cases}$$

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} \infty & 1 & 5 \\ 0 & \infty & 2 \\ \infty & 3 & \infty \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 3 \\ \infty & 1 & 5 \\ 3 & \infty & 5 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 10 \\ 1 & 8 & 3 \\ \infty & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$(A^k)_{ij}$  = "plus petit poids des chemins de longueur  $k$  de  $i$  à  $j$ "

$$= \bigoplus_{i_1, \dots, i_{k-1}} w_{ii_1} \otimes w_{i_1 i_2} \otimes \dots \otimes w_{i_{k-1} j}$$

# Le semi-anneau $(\min, +)$

Lien avec les algorithmes de plus court chemin

$G = (V, \mathcal{A})$  un graphe orienté avec  $V = \{1, \dots, n\}$  et  $w : V \rightarrow \mathbb{R}$ .

On représente le graphe pondéré par une matrice  $A$ ,

$$A_{ij} = \begin{cases} w_{ij}, & (i, j) \in \mathcal{A} \\ +\infty, & (i, j) \notin \mathcal{A} \end{cases}$$

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} \infty & 1 & 5 \\ 0 & \infty & 2 \\ \infty & 3 & \infty \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 3 \\ \infty & 1 & 5 \\ 3 & \infty & 5 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 10 \\ 1 & 8 & 3 \\ \infty & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$(A^k)_{ij}$  = "plus petit poids des chemins de longueur  $k$  de  $i$  à  $j$ "

$$= \bigoplus_{i_1, \dots, i_{k-1}} w_{ii_1} \otimes w_{i_1 i_2} \otimes \dots \otimes w_{i_{k-1} j}$$

$(I_n \oplus A)_{ij}^k$  = "plus petit poids des chemins de longueur **au plus**  $k$  de  $i$  à  $j$ "

# Le semi-anneau $(\min, +)$

Lien avec les algorithmes de plus court chemin

On cherche à calculer :  $\lim_{k \rightarrow \infty} (I_n \oplus A)_{ij}^k$

- ▶ S'il n'y a aucun cycle de poids négatif, alors  $\lim_{k \rightarrow \infty} (I_n \oplus A)_{ij}^k = \lim_{k \rightarrow \infty} (I_n \oplus A)_{ij}^{n-1}$
- ▶ Sinon certains coefficients peuvent tendre vers  $-\infty \notin \mathbb{R}_{\min}$

**Remarque.** Pour éliminer le problème d'appartenance de la limite à l'ensemble de départ, on complète  $\mathbb{R}_{\min}$ ,  $\overline{\mathbb{R}}_{\min} = \mathbb{R}_{\min} \cup \{-\infty\}$ , avec convention  $-\infty \otimes +\infty = +\infty$ .

**Notation :**

- ▶  $a^{(k)} = e \oplus a \oplus \dots \oplus a^k$
- ▶  $a^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} a^n$  la limite de la suite  $a^{(k)}$  lorsqu'elle existe (clôture ou pseudo-inverse)

**Remarque :**  $(I_n \oplus A)^k = I_n \oplus A \oplus \dots \oplus A^k = A^{(k)}$

# Le semi-anneau $(\min, +)$

Lien avec les algorithmes de plus court chemin

Def. Un élément est  $p$ -régulier si  $a^{(p+1)} = a^{(p)}$

Prop.  $p$ -régulier ssi  $a^{(k)} = a^{(p)}$  pour tout  $k \geq p$ .

Dans  $(\mathbb{R}_{\min}, \min, +)$

- ▶ Tout  $a \geq 0$  est 0-régulier ( $a^0 = 0$ ,  $a^{(1)} = 0 \oplus a = 0$ ).
- ▶ Tout  $a < 0$  n'est pas régulier (et  $a^* = -\infty$ ).

# Le semi-anneau $(\min, +)$

Lien avec les algorithmes de plus court chemin

Thm. Soit  $A \in M_n(\mathbb{R}_{\min})$ . On distingue deux cas :

- ▶  $A^* \in M_n(\mathbb{R}_{\min})$  et  $A$  est  $n - 1$  régulière ;
- ▶  $A^* \in M_n(\overline{\mathbb{R}}_{\min}) \setminus M_n(\mathbb{R}_{\min})$  et  $A$  n'est pas régulière.

# Le semi-anneau $(\min, +)$

Lien avec les algorithmes de plus court chemin

Thm. Soit  $A \in M_n(\mathbb{R}_{\min})$ . On distingue deux cas :

- ▶  $A^* \in M_n(\mathbb{R}_{\min})$  et  $A$  est  $n - 1$  régulière ;
- ▶  $A^* \in M_n(\overline{\mathbb{R}}_{\min}) \setminus M_n(\mathbb{R}_{\min})$  et  $A$  n'est pas régulière.

*Preuve.*

- ▶  $A$  ne contient pas de cycle de poids négatif. Alors  $A^{(n)} = A^{(n-1)}$  car tout chemin de longueur  $n$  de  $i$  à  $j$  contient un cycle, i.e.  $A_{ij}^n \geq A_{ij}^{n-k}$  pour un  $k \geq 1$ .

# Le semi-anneau $(\min, +)$

Lien avec les algorithmes de plus court chemin

Thm. Soit  $A \in M_n(\mathbb{R}_{\min})$ . On distingue deux cas :

- ▶  $A^* \in M_n(\mathbb{R}_{\min})$  et  $A$  est  $n - 1$  régulière ;
- ▶  $A^* \in M_n(\overline{\mathbb{R}}_{\min}) \setminus M_n(\mathbb{R}_{\min})$  et  $A$  n'est pas régulière.

*Preuve.*

- ▶  $A$  ne contient pas de cycle de poids négatif. Alors  $A^{(n)} = A^{(n-1)}$  car tout chemin de longueur  $n$  de  $i$  à  $j$  contient un cycle, i.e.  $A_{ij}^n \geq A_{ij}^{n-k}$  pour un  $k \geq 1$ .
- ▶  $A$  contient un cycle de poids négatif  $w$ ,  $i, j, \dots, i$  et de longueur  $k$ . Alors  $A_{ij}^k \leq kw \rightarrow -\infty$  et  $A_{ij}^* = -\infty$ .

# Le semi-anneau $(\min, +)$

Lien avec les algorithmes de plus court chemin

Thm. Soit  $A \in M_n(\mathbb{R}_{\min})$ . On distingue deux cas :

- ▶  $A^* \in M_n(\mathbb{R}_{\min})$  et  $A$  est  $n - 1$  régulière ;
- ▶  $A^* \in M_n(\overline{\mathbb{R}}_{\min}) \setminus M_n(\mathbb{R}_{\min})$  et  $A$  n'est pas régulière.

*Preuve.*

- ▶  $A$  ne contient pas de cycle de poids négatif. Alors  $A^{(n)} = A^{(n-1)}$  car tout chemin de longueur  $n$  de  $i$  à  $j$  contient un cycle, i.e.  $A_{ij}^n \geq A_{ij}^{n-k}$  pour un  $k \geq 1$ .
- ▶  $A$  contient un cycle de poids négatif  $w$ ,  $i, j, \dots, i$  et de longueur  $k$ . Alors  $A_{ij}^k \leq kw \rightarrow -\infty$  et  $A_{ij}^* = -\infty$ .

Remarques :

- ▶ **Algorithme Bellman-Ford** : La relaxation permet de passer de  $A^{(k)}$  à  $A^{(k+1)}$ , et on détecte l'existence de cycle de poids  $< 0$  en comparant  $A^{(n)}$  à  $A^{(n-1)}$ .
- ▶ L'approche algébrique peut s'appliquer à des cas plus généraux que  $(\mathbb{R}_{\min}, \min, +)$ .

# Préordre canonique

- ▶ **Préordre canonique** : dans un monoïde  $(E, \oplus)$  on peut toujours définir une relation binaire réflexive et transitive, notée  $\preceq$ , par :

$$a \preceq b \Leftrightarrow \exists c \in E \quad \text{tel que } b = a \oplus c.$$

**Propriété** : Dans un monoïde commutatif  $(E, \oplus)$ , la relation de préordre canonique est **compatible avec la loi  $\oplus$** , c.à.d. :

$$a \preceq b \Rightarrow a \oplus c \preceq b \oplus c \quad \forall c \in E.$$

- ▶ Un monoïde commutatif est **canoniquement ordonné** lorsque la relation de préordre canonique est une relation d'ordre, c.à.d. satisfait en plus la propriété d'antisymétrie :

$$a \preceq b \text{ et } b \preceq a \Rightarrow a = b.$$

- ▶ **Dioïde** : un semi-anneau  $(E, \oplus, \otimes)$  dans lequel la relation de préordre canonique relativement à  $\oplus$  est une relation d'ordre (c.à.d. vérifie :  $a \preceq b$  et  $b \preceq a \Rightarrow a = b$ .)

# Quelques propriétés

**Proposition 1.** Si  $\oplus$  est commutative et *idempotente* (c.à.d.  $\forall a \in E \ a \oplus a = a$ ), alors la relation de préordre canonique  $\preceq$  est une relation d'ordre.

**Proposition 2.** Si  $\oplus$  est commutative et *sélective* (c.à.d.  $a \oplus b \in \{a, b\}$ ), alors la relation de préordre canonique  $\preceq$  est une relation d'ordre total (c.à.d. pour tout  $a, b \in E$  : soit  $a \preceq b$  soit  $b \preceq a$ ).

**Proposition 3.** Un monoïde non-trivial (c.à.d. ayant au moins 2 éléments différents) ne peut être à la fois un groupe et être canoniquement ordonné.

**Exemples :**  $(\mathbb{R}, +)$  un groupe ;  $(\mathbb{R}^+, +)$  monoïde canoniquement ordonné.

**Corollaire 1.** Un semi-anneau non-trivial ne peut être à la fois un anneau et un dioïde.

**Exemples :**  $(\mathbb{Z}, +, \times)$  un anneau ;  $(\mathbb{N}, +, \times)$  un dioïde.

# Exemples

Semi-anneau  $(\mathbb{R}_{\min}, \min, +)$

# Exemples

Semi-anneau  $(\mathbb{R}_{\min}, \min, +)$

- ▶ **commutatif**, i.e.  $(\mathbb{R}_{\min}, \otimes)$  est commutatif

# Exemples

Semi-anneau  $(\mathbb{R}_{\min}, \min, +)$

- ▶ **commutatif**, i.e.  $(\mathbb{R}_{\min}, \otimes)$  est commutatif
- ▶ Relation de préordre canonique :  $a \preceq b \Leftrightarrow a \oplus b = b$   
( $\Leftrightarrow a \geq b$  pour l'ordre habituel)

# Exemples

Semi-anneau  $(\mathbb{R}_{\min}, \min, +)$

- ▶ **commutatif**, i.e.  $(\mathbb{R}_{\min}, \otimes)$  est commutatif
- ▶ Relation de préordre canonique :  $a \preceq b \Leftrightarrow a \oplus b = b$   
( $\Leftrightarrow a \geq b$  pour l'ordre habituel)
- ▶ **idempotent** :  $a \oplus a = a, \forall a \in \mathbb{R}_{\min}$

# Exemples

Semi-anneau  $(\mathbb{R}_{\min}, \min, +)$

- ▶ **commutatif**, i.e.  $(\mathbb{R}_{\min}, \otimes)$  est commutatif
- ▶ Relation de préordre canonique :  $a \preceq b \Leftrightarrow a \oplus b = b$   
( $\Leftrightarrow a \geq b$  pour l'ordre habituel)
- ▶ **idempotent** :  $a \oplus a = a, \forall a \in \mathbb{R}_{\min}$   
 $\Rightarrow (\mathbb{R}_{\min}, \min, +)$  est un **dioïde**.

# Exemples

Semi-anneau  $(\mathbb{R}_{\min}, \min, +)$

- ▶ **commutatif**, i.e.  $(\mathbb{R}_{\min}, \otimes)$  est commutatif
- ▶ Relation de préordre canonique :  $a \preceq b \Leftrightarrow a \oplus b = b$   
( $\Leftrightarrow a \geq b$  pour l'ordre habituel)
- ▶ **idempotent** :  $a \oplus a = a, \forall a \in \mathbb{R}_{\min}$   
 $\Rightarrow (\mathbb{R}_{\min}, \min, +)$  est un **dioïde**.
- ▶ **sélectif** :  $a \oplus b \in \{a, b\}$   
 $\Rightarrow (\mathbb{R}_{\min}, \min, +)$  est totalement ordonné.

**Exercice (algèbre qualitative)**. Sur l'ensemble  $S = \{+, -, 0, ?\}$  on considère les lois  $\oplus$  et  $\otimes$  définies par :

$\oplus$	+	-	0	?	$\otimes$	+	-	0	?
+	+	?	+	?	+	+	-	0	?
-	?	-	-	?	-	-	+	0	?
0	+	-	0	?	0	0	0	0	0
?	?	?	?	?	?	?	?	0	?

Est-ce que  $(S, \oplus, \otimes)$  est un anneau ? un dioïde ?

# Routage - une approche algébrique

- ▶  $(S, \oplus, \otimes)$  un semi-anneau ; souvent dioïde
- ▶  $G = (V, \mathcal{A})$  un graphe dirigé ;  $|V| = n$
- ▶  $w : \mathcal{A} \rightarrow S$
- ▶ A matrice d'incidence  $n \times n$  induite par  $w$   
Remarque : A partir d'une matrice  $A \in M_n(S)$  on peut construire un graphe  $G(A)$ , arc ssi  $a_{ij} \neq \epsilon$ .
- ▶  $(M_n(S), \oplus, \otimes)$  où pour  $A, B \in M_n(S)$ ,

$$(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$$

$$(A \otimes B)_{ij} = \oplus_k A_{ik} \otimes B_{kj}$$

est alors aussi un semi-anneau.

# Routage - une approche algébrique

Chemins :

- ▶  $P_{ij}(G)$  : l'ensemble de chemins dans  $G$  de  $i$  vers  $j$ ;  $P_{ij}$  si pas de confusion possible
- ▶  $P_{ij}^k(G)$  ou  $P_{ij}^k$  : l'ensemble de chemins de longueur  $k$  de  $i$  vers  $j$
- ▶  $P_{ij}^{(k)}(G)$  ou  $P_{ij}^{(k)}$  : l'ensemble de chemins de longueur au plus  $k$  de  $i$  vers  $j$
- ▶ Pour un chemin  $\mu \in P_{ij}^k$ ,  $\mu = (i = i_0, i_1, \dots, i_k = j)$  le poids de  $\mu$  est défini comme

$$w(\mu) = \otimes_{\ell=1}^k w(i_{\ell-1}, i_\ell) = \otimes_{\ell=1}^k A_{i_{\ell-1}, i_\ell}$$

**Proposition.** Pour tout  $k$ ,

$$A_{ij}^k = \oplus_{\mu \in P_{ij}^k} w(\mu), \quad A_{ij}^{(k)} = \oplus_{\mu \in P_{ij}^{(k)}} w(\mu).$$

*Preuve.* Pour  $A_{ij}^k$  par définition de  $A^k$ . Pour  $A_{ij}^{(k)}$  par induction sur  $k$ .

# Routage - une approche algébrique

## Semi-anneau

- ▶ commutatif : un circuit a toujours le même poids.
- ▶ non-commutatif : besoin de regarder les **circuits pointés** (on pointe son origine).

**Rappel** : Un élément est  $p$ -régulier si  $a^{(p+1)} = a^{(p)}$

**Prop.** Si tous les circuits pointés sont  $p$ -réguliers, alors

$$A_{ij}^{(k)} = \bigoplus_{\mu \in \mathcal{C}} w(\mu)$$

où  $\mathcal{C}$  est l'ensemble de tous les chemins de longueur au plus  $k$  qui n'empruntent pas plus de  $p$  fois successives chaque circuit pointé de  $A$ .

# Routage - une approche algébrique

*Preuve.* Soit  $\mu$  un chemin de  $i$  vers  $j$  empruntant  $p + q$  fois successives le circuit pointé  $\gamma_{\ell\ell}$  :

$$\mu = \mu_{i\ell}(\gamma_{\ell\ell})^{p+q}\mu_{\ell j} \in P_{ij}^{(k)}$$

# ROUTAGE - une approche algébrique

*Preuve.* Soit  $\mu$  un chemin de  $i$  vers  $j$  empruntant  $p + q$  fois successives le circuit pointé  $\gamma_{\ell\ell}$  :

$$\mu = \mu_{i\ell}(\gamma_{\ell\ell})^{p+q}\mu_{\ell j} \in P_{ij}^{(k)}$$

Pour  $0 \leq r \leq p$  on note

$$\mu^r = \mu_{i\ell}(\gamma_{\ell\ell})^{q-1+r}\mu_{\ell j} \in P_{ij}^{(k)}$$

Alors

$$\begin{aligned} & w(\mu^0) \oplus \cdots \oplus w(\mu^p) \oplus w(\mu) \\ &= w(\mu_{i\ell}) \otimes w(\gamma_{\ell\ell}^{q-1}) \otimes (w(\gamma_{\ell\ell}^0) \oplus \cdots \oplus w(\gamma_{\ell\ell}^{p+1})) \otimes w(\mu_{\ell j}) \\ &= w(\mu_{i\ell}) \otimes w(\gamma_{\ell\ell})^{q-1} \otimes (w(\gamma_{\ell\ell})^0 \oplus \cdots \oplus w(\gamma_{\ell\ell})^{p+1}) \otimes w(\mu_{\ell j}) \\ &= w(\mu_{i\ell}) \otimes w(\gamma_{\ell\ell})^{q-1} \otimes w(\gamma_{\ell\ell})^{(p+1)} \otimes w(\mu_{\ell j}) \\ &= w(\mu_{i\ell}) \otimes w(\gamma_{\ell\ell})^{q-1} \otimes w(\gamma_{\ell\ell})^{(p)} \otimes w(\mu_{\ell j}) \end{aligned}$$



## Cas particuliers

Si tous les circuits sont 0-réguliers (i.e.  $w(\gamma) \oplus e = e$  pour tout circuit  $\gamma$ )

$$\blacktriangleright A_{ij}^{(k)} = \bigoplus_{\mu \in P_{ij}^{(k)}(0)} w(\mu)$$

où  $P_{ij}^{(k)}(0)$  sont des chemins élémentaires de  $P_{ij}^{(k)}$

$$\blacktriangleright A_{ij}^{(n-1)} = \bigoplus_{\mu \in P_{ij}(0)} w(\mu)$$

où  $P_{ij}(0)$  sont des chemins élémentaires de  $i$  à  $j$

donc  $A^*$  existe et  $A^* = A^{(n-1)}$

## Cas particuliers

Si tous les circuits sont 0-réguliers (i.e.  $w(\gamma) \oplus e = e$  pour tout circuit  $\gamma$ )

$$\blacktriangleright A_{ij}^{(k)} = \bigoplus_{\mu \in P_{ij}^{(k)}(0)} w(\mu)$$

où  $P_{ij}^{(k)}(0)$  sont des chemins élémentaires de  $P_{ij}^{(k)}$

$$\blacktriangleright A_{ij}^{(n-1)} = \bigoplus_{\mu \in P_{ij}(0)} w(\mu)$$

où  $P_{ij}(0)$  sont des chemins élémentaires de  $i$  à  $j$

donc  $A^*$  existe et  $A^* = A^{(n-1)}$

Si  $S$  est commutatif et tous les circuits sont  $p$ -réguliers

$$\blacktriangleright A_{ij}^{(k)} = \bigoplus_{\mu \in P_{ij}^{(k)}(p)} w(\mu)$$

où  $P_{ij}^{(k)}(p)$  sont des chemins de  $P_{ij}^{(k)}$  n'empruntant pas plus de  $p$  fois chaque circuit élémentaire

$$\blacktriangleright A_{ij}^{(n-1)} = \bigoplus_{\mu \in P_{ij}(p)} w(\mu)$$

où  $P_{ij}(p)$  sont des chemins de  $i$  à  $j$  n'empruntant pas plus de  $p$  fois chaque circuit élémentaire

donc  $A^*$  existe et  $A^* = A^{(n_p)}$  où  $n_p \leq n - 1 + pn_{ce}$  avec  $n_{ce}$  le nombre de circuits élémentaires.

# Résolution d'équations

Hypothèse :  $S$  est un dioïde.

Prop.  $M_n(S)$  est aussi un dioïde (preuve en exercice).

Prop. Soit  $B \in M_{n,m}(S)$  avec  $1 \leq m \leq n$  et  $A \in M_n(S)$ . Alors  $A^* \otimes B \in M_{n,m}(S)$  est la plus petite (au sens de l'ordre canonique) solution de l'équation

$$X = A \otimes X \oplus B.$$

# Résolution d'équations

Hypothèse :  $S$  est un dioïde.

Prop.  $M_n(S)$  est aussi un dioïde (preuve en exercice).

Prop. Soit  $B \in M_{n,m}(S)$  avec  $1 \leq m \leq n$  et  $A \in M_n(S)$ . Alors  $A^* \otimes B \in M_{n,m}(S)$  est la plus petite (au sens de l'ordre canonique) solution de l'équation

$$X = A \otimes X \oplus B.$$

*Preuve.*

►  $A^* \otimes B$  est bien une solution :

$$A \otimes (A^* \otimes B) \oplus B = (A \otimes A^* \oplus I) \otimes B = A^* \otimes B$$

# Résolution d'équations

Hypothèse :  $S$  est un dioïde.

Prop.  $M_n(S)$  est aussi un dioïde (preuve en exercice).

Prop. Soit  $B \in M_{n,m}(S)$  avec  $1 \leq m \leq n$  et  $A \in M_n(S)$ . Alors  $A^* \otimes B \in M_{n,m}(S)$  est la plus petite (au sens de l'ordre canonique) solution de l'équation

$$X = A \otimes X \oplus B.$$

*Preuve.*

- ▶  $A^* \otimes B$  est bien une solution :  
 $A \otimes (A^* \otimes B) \oplus B = (A \otimes A^* \oplus I) \otimes B = A^* \otimes B$
- ▶ Soit  $X$  une solution. Alors

$$\begin{aligned} X &= A \otimes X \oplus B \\ &= A \otimes (A \otimes X \oplus B) \oplus B = A^2 \otimes X \oplus A^{(1)} \otimes B \\ &= \dots = A^{k+1} \otimes X \oplus A^{(k)} \otimes B \end{aligned}$$

$(S, \oplus)$  est un monoïde commutatif, donc  $X = A^{(k)} \otimes B \oplus C \succeq A^{(k)} \otimes B$  pour tout  $k$ . A la limite,  $X \succeq A^* \otimes B$ .

# Résolution d'équations

Remarque : **Unicité de solution dans  $(\mathbb{R}_{\min}, \min, +)$**

Dans  $(\mathbb{R}_{\min}, \min, +)$ , si  $A$  n'a pas de circuit de poids  $\leq 0$  alors  
 $X = A \otimes X \oplus B$  a une unique solution. Cette solution est  $A^* \otimes B$ .

# Résolution d'équations

Remarque : **Unicité de solution dans  $(\mathbb{R}_{\min}, \min, +)$**

Dans  $(\mathbb{R}_{\min}, \min, +)$ , si  $A$  n'a pas de circuit de poids  $\leq 0$  alors  $X = A \otimes X \oplus B$  a une unique solution. Cette solution est  $A^* \otimes B$ .

*Preuve.*

$X = A^{k+1} \otimes X \oplus A^{(k)} \otimes B$ . On a  $A^{k+1} \rightarrow +\infty$  car circuits de poids  $> 0$   
 $\Rightarrow \exists k$  tq.  $X = A^{(k)} \otimes B = A^* \otimes B$

# Résolution d'équations

Remarque : **Unicité de solution dans  $(\mathbb{R}_{\min}, \min, +)$**

Dans  $(\mathbb{R}_{\min}, \min, +)$ , si  $A$  n'a pas de circuit de poids  $\leq 0$  alors  $X = A \otimes X \oplus B$  a une unique solution. Cette solution est  $A^* \otimes B$ .

*Preuve.*

$X = A^{k+1} \otimes X \oplus A^{(k)} \otimes B$ . On a  $A^{k+1} \rightarrow +\infty$  car circuits de poids  $> 0$   
 $\Rightarrow \exists k$  tq.  $X = A^{(k)} \otimes B = A^* \otimes B$

Remarque :

Si distances vers la destination  $i$  :

$$A^* \otimes \begin{bmatrix} +\infty \\ \vdots \\ +\infty \\ 0 \\ +\infty \\ \vdots \\ +\infty \end{bmatrix} \leftarrow i\text{\`eme ligne}$$

# Adaptation de Bellman-Ford

Hypothèse : matrice  $p$ -régulière

Cas particuliers

- ▶ **circuits 0-réguliers**. Alors  $p = n - 1$
- ▶ **circuits  $q$ -réguliers et commutativité** (de  $\otimes$ );  $n_{ce}$  est le nombre de circuits élémentaires

$$p \leq n - 1 + qn_{ce}$$

**Adaptation de Bellman-Ford** (a.k.a. Jacobi généralisé)

Calcule  $i$ -ème colonne de  $A^*$  ou prouve que  $A^{(p)} \neq A^*$

1. Initialiser  $t = 0$  et  $x(0) = b$
2. Tant que  $t < p$  :  
 $x(t+1) = A \otimes x(t) \oplus b$   
Si  $x(t+1) = x(t)$   
    STOP (renvoyer  $x(t) = A^* \otimes b$ )  
 $t \leftarrow t + 1$
3. (si on arrive ici)  $A^* \neq A^{(p)}$

$$b = \begin{bmatrix} \epsilon \\ \vdots \\ \epsilon \\ e \\ \epsilon \\ \vdots \\ \epsilon \end{bmatrix} \leftarrow i\text{ème ligne}$$

# Stochastic shortest path problems

Deterministic shortest path problem :

- ▶ Input : a graph with nodes  $1, 2, \dots, n, t$ , where  $t$  is a special state called the *destination* or *termination state*.
- ▶ Problem : for each node  $i \neq t$ , choose a successor node  $\mu(i)$  so that  $(i, \mu(i))$  is an arc, and the path formed by a sequence of successor nodes starting at any node  $j$  terminates at  $t$  and has minimum sum of arc lengths over all paths that start at  $j$  and terminate at  $t$ .

# Stochastic shortest path problems

## Deterministic shortest path problem :

- ▶ Input : a graph with nodes  $1, 2, \dots, n, t$ , where  $t$  is a special state called the *destination* or *termination state*.
- ▶ Problem : for each node  $i \neq t$ , choose a successor node  $\mu(i)$  so that  $(i, \mu(i))$  is an arc, and the path formed by a sequence of successor nodes starting at any node  $j$  terminates at  $t$  and has minimum sum of arc lengths over all paths that start at  $j$  and terminate at  $t$ .

## Stochastic shortest path problem (SSP) :

- ▶ At each node  $i$ , we must select a probability distribution over all possible successor nodes  $j$  out of a given set of probability distributions  $p_{ij}(u)$  parametrized by a control  $u \in U(i)$ .
- ▶ For a given selection of distributions and for a given origin node, the path traversed as well as its length are now random, but we wish that the path leads to the destination  $t$  with probability 1 and has minimum expected length.