

CHAÎNES DE MARKOV (3)

Exercice 1

Retour à l'état initial

Soit τ le temps de retour à l'état initial d'une chaîne de Markov homogène irréductible et récurrente positive $\{X_n\}$ d'espace d'état E , c'est-à-dire $\tau = \inf\{n \mid X_n = X_0\}$.

1. Calculer l'espérance de τ quand la distribution initiale est la distribution stationnaire de $\{X_n\}$. En déduire que cette espérance est finie si et seulement si E est fini.
2. Est-ce contradictoire avec le fait que $\{X_n\}$ soit récurrente positive ?

Exercice 2

Théorème de Kolmogorov pour les chaînes périodiques

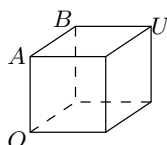
Soit $\{X(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov irréductible, récurrente positive et de période d et de probabilité stationnaire π .

1. Montrer que la chaîne $\{X_{nd}\}_{n \in \mathbb{N}}$ possède d classes de communication $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_d$, toutes apériodiques.
2. Que vaut $\sum_{i \in \mathcal{C}_1} \pi(i)$?
3. Quelle est la probabilité stationnaire de la classe de communication $\mathcal{C}_1$?
4. En déduire le comportement de la suite $p_{i,j}(n)$ quand $n \rightarrow \infty$.

Exercice 3

Marche aléatoire sur un cube

On définit la marche aléatoire sur les sommets d'un cube représenté sur la figure suivante : si $\{X_n\}$ est la chaîne de Markov la représentant, alors $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = 1/3$ si i et j sont voisins, et 0 sinon.



On note T_x le temps d'atteinte du sommet x : $T_x = \min\{n \geq 0 \mid X_n = x\}$.

1. Calculer $\mathbb{E}_O[T_U]$.
2. Calculer $P_A(T_U < T_O)$.
3. Calculer p_k la probabilité que partant de O , la chaîne visite exactement k fois U avant le premier retour en O .

Exercice 4

La chaîne serpent

Soit $\{X_n\}_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov homogène d'espace d'état E et de matrice de transition P . Pour $L \geq 1$, on définit $Y_n = (X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+L})$.

1. Le processus $\{Y_n\}_n$ prend ses valeurs dans $f = E^{L+1}$. Montrer que c'est une chaîne de Markov homogène et donner sa matrice de transition.
2. Montrer que si $\{X_n\}$ est irréductible, il en est de même pour $\{Y_n\}$ si on restreint l'espace de cette dernière à $F = \{(i_0, \dots, i_L) \in E^{L+1} \mid p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{L-1} i_L} > 0\}$.
3. Montrer que $\{Y_n\}$ est récurrent positif si et seulement si $\{X_n\}$ l'est. Quelle est alors la distribution stationnaire de $\{Y_n\}$ en fonction de celle de $\{X_n\}$?