Structures et algorithmes aléatoires
TD9

4 décembre 2015

Exercice 1 Retour à l'état initial

Soit τ le temps de retour à l'état initial d'une chaîne de Markov homogène irréductible et récurrente positive $\{X_n\}$ d'espace d'état E, c'est-à-dire $\tau = \inf\{n \mid X_n = X_0\}$.

1. Calculer l'espérance de τ quand la distribution initiale est la distribution stationnaire de $\{X_n\}$. En déduire que cette espérance est finie si et seulement si E est fini.
2. Est-ce contradictoire avec le fait que $\{X_n\}$ soit récurrente positive ?

Exercice 2 Méthode un pas en avant

Soit $\{X_n, n \geq 0\}$ une chaîne de Markov homogène de matrice de transition P. Soit F un sous-ensemble de l'espace des états $\mathscr{E}$. On pose

$$\tau_F = \inf\{n \geq 0,\ X_n \in F\} \text{ } (+\infty \text{ si } \{X_n\} \text{ n'atteint jamais } F).$$

Soient $p(i) = \mathbb{P}(\tau_F < \infty \mid X_0 = i)$ et $m(i) = \mathbb{E}(\tau_F | X_0 = i)$, $\forall i \in \mathscr{E}$ la probabilité et le temps moyen d'atteinte de F à partir de l'état i.

1. Montrer que
$$p(i) = \begin{cases} \sum_{j\in\mathscr{E}} p_{ij} p(j) & \text{si } i \notin F \\ 1 & \text{si } i \in F \end{cases}$$
et que
$$m(i) = \begin{cases} 1 + \sum_{j\in\mathscr{E}} p_{ij} m(j) & \text{si } i \notin F \\ 0 & \text{si } i \in F. \end{cases}$$

Une particule A bouge sur les quatre sommets d'un carré. À chaque instant, elle passe à une position adjacente avec probabilité $\frac{1}{3}$ (pour chaque position) et reste dans la même position avec une probabilité $\frac{1}{3}$, indépendamment des positions précédemment occupées. On place sur le même carré une autre particule B dont les mouvements sont de même nature que ceux de A, et les mouvements des deux particules sont indépendants.

2. Quel est le temps moyen pour que les particules se rencontrent, sachant qu'à l'instant initial elles sont adjacentes ?

Exercice 3 Ruine du joueur

Un joueur A, doté d'un capital initial de i euros, $0 < i < K$, joue contre un joueur B, qui a un capital initial de $K - i$ euros. À chaque étape du jeu, A gagne 1 euro avec probabilité p et en perd 1 avec probabilité $q = 1 - p$. La somme des capitaux reste constante égale à K et le jeu s'arrête quand un des deux joueurs est ruiné.

1. Calculer la probabilité de la ruine du joueur A (les étapes du jeu sont indépendantes) en fonction du capital initial du joueur A.
2. Calculer le temps moyen d'une partie en fonction du capital initial du joueur A.

Exercice 4 File d'attente

On considère une file d'attente : des clients arrivent et font la queue devant un guichet. Le guichet sert un client à la fois. On note X_n le nombre de clients dans le file (y compris celui qui est en train d'être servi) juste avant le départ du n-ième client et A_{n+1} le nombre de clients arrivant dans la file entre les instants du $n+1$-ième début de service (non compris) et du $n+1$-ième départ (compris). On suppose aussi que A_{n+1} est indépendant de X_n et que (A_n) est une suite de v.a. indépendantes et identiquement distribuées.

On a donc la relation

$$X_{n+1} = \max(X_n - 1, 0) + A_{n+1}.$$

1. Montrer que X_n est une chaîne de Markov homogène.
2. Cette chaîne est-elle irréductible ? À quelles conditions l'est-elle ? Quelle est sa période ?

On note Φ_a la série génératrice de A_n, Φ_n celle de X_n et aussi $\pi_n(0) = P(X_n = 0)$.

3. Donner une relation entre Φ_n et Φ_{n+1}.

On veut maintenant trouver des conditions pour que la file soit dans un état *stationnaire*, c'est-à-dire que $\forall n$, $\Phi_n = \Phi_{n+1}$.

4. Montrer qu'alors, on doit avoir $E[A_n] \leq 1$ et que si $E[A_n] = 1$, alors $P(A_n = 1) = 1$ et $\forall n \geq 1, X_n = X_0$.

Exercice 5 Marche aléatoire

Soit $G = (V, E)$ un graphe fini non-orienté. À chaque arête $e \in E$, on associe un poids $w(e) > 0$. Pour tout sommet $u \in V$, $V(u)$ est l'ensemble des voisins de u et on pose $w(u) = \sum_{v \in V(u)} w(\{u, v\})$.

Une marche aléatoire pondérée sur G est une chaîne de Markov de matrice de transition P telle que $P_{u,v} = \frac{w(\{u,v\})}{w(u)}$ si $\{u, v\} \in E$ et $P_{u,v} = 0$ sinon.

1. Montrer qu'une marche aléatoire pondérée est réversible. Quelle est sa probabilité stationnaire ?
2. Montrer qu'une chaîne de Markov réversible est une marche aléatoire pondérée.