Structures et algorithmes aléatoires
TD9

28 novembre 2014

Exercice 1 Retour à l'état initial

Soit τ le temps de retour à l'état initial d'une chaîne de Markov homogène irréductible et récurrente positive $\{X_n\}$ d'espace d'état E, c'est-à-dire $\tau = \inf\{n \mid X_n = X_0\}$.

1. Calculer l'espérance de τ quand la distribution initiale est la distribution stationnaire de $\{X_n\}$. En déduire que cette espérance est finie si et seulement si E est fini.
2. Est-ce contradictoire avec le fait que $\{X_n\}$ soit récurrente positive ?

Exercice 2 Les cailloux

Des cailloux $S_1, \dots S_M$ sont alignés. À la date n, un caillou est pris au hasard, et ce caillou échange sa place avec le cailloux placé juste avant lui. Si le caillou sélectionné est en tête, on ne change rien. Par exemple, avec $M = 5$, si la situation juste avant la date n est $S_2S_3S_5S_1S_4$ (S_2 est en tête) et si S_5 est tire au sort, la situation devient $S_2S_5S_3S_1S_4$, tandis que si S_2 est sélectionné, la configuration reste la même. À chaque instant n, S_i est sélectionné avec probabilité $\alpha_i > 0$. Notons X_n la situation à la date n.

Montrer que $\{X_n\}_n$ est une chaîne de Markov homogène, irréductible récurrent positive et que sa distribution stationnaire est

$$\pi(S_{i_1} \cdots S_{i_M}) = C\alpha_{i_1}^M \alpha_{i_2}^{M-1} \cdots \alpha_{i_M}.$$

Exercice 3 Méthode un pas en avant

Soit $\{X_n, n \geq 0\}$ une chaîne de Markov homogène de matrice de transition P. Soit F un sous-ensemble de l'espace des états $\mathscr{E}$. On pose

$$\tau_F = \inf\{n \geq 0,\, X_n \in F\} \text{ } (+\infty \text{ si } \{X_n\} \text{ n'atteint jamais } F).$$

Soient $p(i) = \mathbb{P}(\tau_F < \infty \mid X_0 = i)$ et $m(i) = \mathbb{E}(\tau_F | X_0 = i)$, $\forall i \in \mathscr{E}$ la probabilité et le temps moyen d'atteinte de F à partir de l'état i.

1. Montrer que

$$p(i) = \begin{cases} \sum_{j \in \mathscr{E}} p_{ij} p(j) & \text{si } i \notin F \\ 1 & \text{si } i \in F \end{cases}$$

   et que

$$m(i) = \begin{cases} 1 + \sum_{j \in \mathscr{E}} p_{ij} m(j) & \text{si } i \notin F \\ 0 & \text{si } i \in F. \end{cases}$$

Une particule A bouge sur les quatre sommets d'un carré. À chaque instant, elle passe à une position adjacente avec probabilité $\frac{1}{3}$ (pour chaque position) et reste dans la même position avec une probabilité $\frac{1}{3}$, indépendamment des positions précédemment occupées. On place sur le même carré une autre particule B dont les mouvements sont de même nature que ceux de A, et les mouvements des deux particules sont indépendants.

2. Quel est le temps moyen pour que les particules se rencontrent, sachant qu'à l'instant initial elles sont adjacentes ?

Exercice 4 Ruine du joueur

Un joueur A, doté d'un capital initial de i euros, $0 < i < K$, joue contre un joueur B, qui a un capital initial de $K - i$ euros. À chaque étape du jeu, A gagne 1 euro avec probabilité p et en perd 1 avec probabilité $q = 1 - p$. La somme des capitaux reste constante égale à K et le jeu s'arrête quand un des deux joueurs est ruiné.

1. Calculer la probabilité de la ruine du joueur A (les étapes du jeu sont indépendantes) en fonction du capital initial du joueur A.
2. Calculer le temps moyen d'une partie en fonction du capital initial du joueur A.

Exercice 5 Marche aléatoire

On considère $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la chaîne de Markov sur l'espace d'états $\mathbb{Z}$ de matrice de transition suivante : pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $p_{x,x+1} = 1/2$ et $p_{x,x-1} = 1/2$.

1. Calculer la probabilité $u_n = P_0(X_n = 0)$.

Soit f_n la probablité que le premier retour en 0 (sachant que $X(0) = 0$) se fasse au temps n.

2. Quelle est la relation entre les suites (u_n) et (f_n) ?

On note U et F les fonctions génératrices respectives de (u_{2n}) et (f_{2n}) : $F(s) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_{2n}s^n$ et $U(s) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_{2n}s^n$.

3. Montrer que $U(s) = \frac{1}{\sqrt{1-s}}$. En déduire que $F(s) = 1-(1-s)^{1/2}$.
4. En déduire la probabilité que le temps de retour ait lieu en temps fini presque sûrement. Quelle est l'espérance du temps de retour en 0 ?