Chaînes de Markov (2)

Exercice 1 **Méthode un pas en avant**

Soit $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ une chaîne de Markov homogène de matrice de transition P. Soit F un sous-ensemble de l'espace des états $\mathcal{E}$. On pose

$$\tau_F = \inf\{n \geq 0,\ X_n \in F\}\ (+\infty \text{ si } \{X_n\} \text{ n'atteint jamais } F).$$

Soient $p(i) = P(\tau_F < \infty \mid X_0 = i)$ et $m(i) = \mathbb{E}(\tau_F | X_0 = i)$, $\forall i \in \mathcal{E}$ la probabilité et le temps moyen d'atteinte de F à partir de l'état i.

1. Montrer que

$$p(i) = \begin{cases} \sum_{j\in\mathcal{E}} p_{ij}p(j) & \text{si } i \notin F \\ 1 & \text{si } i \in F \end{cases}$$

et que

$$m(i) = \begin{cases} 1 + \sum_{j\in\mathcal{E}} p_{ij}m(j) & \text{si } i \notin F \\ 0 & \text{si } i \in F. \end{cases}$$

Une particule A bouge sur les quatre sommets d'un carré. À chaque instant, elle passe à une position adjacente avec probabilité $\frac{1}{3}$ (pour chaque position) et reste dans la même position avec une probabilité $\frac{1}{3}$, indépendamment des positions précédemment occupées. On place sur le même carré une autre particule B dont les mouvements sont de même nature que ceux de A, et les mouvements des deux particules sont indépendants.

2. Quel est le temps moyen pour que les particules se rencontrent, sachant qu'à l'instant initial elles sont adjacentes ?

Exercice 2 **Ruine du joueur**

Un joueur A, doté d'un capital initial de i euros, $0 < i < K$, joue contre un joueur B, qui a un capital initial de $K - i$ euros. À chaque étape du jeu, A gagne 1 euro avec probabilité p et en perd 1 avec probabilité $q = 1 - p$. La somme des capitaux reste constante égale à K et le jeu s'arrête quand un des deux joueurs est ruiné.

1. Calculer la probabilité de la ruine du joueur A (les étapes du jeu sont indépendantes) en fonction du capital initial du joueur A.

2. Calculer le temps moyen d'une partie en fonction du capital initial du joueur A.

Exercice 3 **Chaînes transitoires**

On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en temps discret avec un espace d'état infini dénombrable. On suppose de plus que le graphe de transition de X_n admet une seule classe finale irréductible, qui ne contient qu'un nombre fini d'états. L'ensemble des états transitoires est noté A.

1. Expliquer comment mettre la matrice de transition de X_n sous forme triangulaire inférieure par blocks

$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ R & Q \end{pmatrix}.$$

Expliquer pourquoi dans un tel cas, le comportement asymptotique n'est pas nécessairement unique. Donner tous les comportements possibles, *a priori*.

2. Pour tout $i \in A$, on définit les probabilités $v(i) = P(X_n \in A, \forall n \in \mathbb{N} | X_0 = i)$ et $v_n(i) = P(X_1 \in A, \ldots, X_n \in A | X_0 = i)$. Montrer que $v_n \downarrow v$ et donner une formule du vecteur de taille infinie v_n en fonction de Q^n.

3. Montrer que $v = Qv$.

4. Montrer que v est la plus grande solution de l'équation en u, $u = Qu$ qui vérifie $0 \leq u(i) \leq 1$ pour tout i dans A.

5. Montrer que soit $v(i) = 0, \forall i \in A$, soit $\sup_{i \in A} v(i) = 1$.
Donner un exemple d'une chaîne telle que $v = 0$ et d'une autre telle que $\sup_{i \in A} v(i) = 1$.

`Exercice 4` `Chaîne produit`

Soient (X_n) et (Y_n) deux chaînes de Markov indépendantes de la même matrice de transition P. On définit la chaîne produit $U_n = (X_n, Y_n)$.

1. Montrer que (U_n) est une chaîne de Markov.

2. Quelle est la matrice de transition de (U_n) ?

3. Montrer que (U_n) est irréductible si P est irreductible et apériodique. Est-ce nécessaire de supposer que P est apériodique ?

`Exercice 5` `La chaîne serpent`

Soit $\{X_n\}_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov homogène d'espace d'état E et de matrice de transition P. Pour $L \geq 1$, on définit $Y_n = (X_n, X_{n+1} \ldots, X_{n+L})$.

1. Le processus $\{Y_n\}_n$ prend ses valeurs dans $f = E^{L+1}$. Montrer que c'est une chaîne de Markov homogène et donner sa matrice de transition.

2. Montrer que si $\{X_n\}$ est irréductible, il en est de même pour $\{Y_n\}$ si on restreint l'espace de cette dernière à $F = \{(i_0, \ldots, i_L) \in E^{L+1} \mid p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{L-1} i_L} > 0\}$.

3. Montrer que $\{Y_n\}$ est récurrent positive si et seulement si $\{X_n\}$ l'est. Quelle est alors la distribution stationnaire de $\{Y_n\}$ en fonction de celle de $\{X_n\}$?