Structures et algorithmes aléatoires

TD n°5

6 novembre 2015

Exercice 1 Somme de variables binomiales

1. Trouver la fonction génératrice d'une variable aléatoire distribuée selon une loi binomiale $\mathscr{B}\text{in}(n,p)$.
2. Soit X distribué selon $\mathscr{B}\text{in}(n,p)$ et Y distribué selon $\mathscr{B}\text{in}(m,p)$. Quelle est la fonction génératrice de la somme $X+Y$ si X et Y sont indépendants ?
3. En déduire la distribution de $X+Y$.

Exercice 2 Succès consécutifs

Soit A_n, $n \geq 1$, une suite d'événements indépendants définis sur l'espace de probabilités $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. Soit ν le plus petit entier n tel que A_n soit réalisé, avec $\nu = \infty$ si aucun des A_n ne l'est. Exprimer l'événement $\{\nu = n\}$ en fonction des A_m et calculer la loi de probabilité de ν en fonction des réels $p_m = \mathbb{P}(A_m)$, $m \geq 1$. Quelle est cette loi quand $p_m = p$ pour tout m ?
2. Soit ν^* le plus petit entier $n \geq 2$ tel que A_{n-1} et A_n soient réalisés à la fois. Exprimer l'événement $\{\nu^* = n\}$ en fonction des A_m et montrer que pour tout n, les événements $\{\nu^* = n\}$, A_{n+1}, A_{n+2},... sont indépendants.
3. Montrer que pour tout $n \geq 0$,
$$\{\nu^* = n+3\} = \{\nu^* > n\} \cap A_{n+1}^c \cap A_{n+2} \cap A_{n+3} \quad .$$
En déduire une équation de récurrence pour les réels $q_n = \mathbb{P}(\nu^* = n)$. Calculer la fonction génératrice de ν^* et sa moyenne dans le cas où $p_m = p$ pour tout m.
4. On jète un dé jusqu'à ce qu'on ait obtenu deux 6 consécutifs. Quel est le nombre espéré de jets ?

Exercice 3 Ordonnancement aléatoire

On veut disperser n tâches à m processeurs. Supposons que m divise n. Chaque tâche nécessite 1 unité de temps avec probabilité p et $k > 1$ unités avec probabilité $1-p$. Les temps d'exécution des tâches sont indépendants. Déduire des bornes de type Chernoff sur le temps d'exécution global pour le cas qu'on attribue n/m tâches à chaque processeur uniformement.

Exercice 4 Marche aléatoire

Soit $\{X_i\}$, $i \geq 1$, une suite de variables aléatoires indépendantes et équidistribuées à valeur dans $\{-1,1\}$ avec $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2$. On considère la marche aléatoire $\{N_n\}$ sur $\mathbb{Z}$ définie par $N_0 = 0$ et

$$N_{n+1} = N_n + X_{n+1}, \ n \geq 0.$$

1. Montrer que pour tout $a > 0$ et tout $x > 0$,
$$\mathbb{P}(N_n \geq a) \leq e^{-ax}\mathbb{E}(e^{xN_n}) \quad .$$
2. Utiliser le fait que $\cosh x \leq e^{x^2/2}$ pour en déduire que
$$\mathbb{P}(N_n \geq a) \leq e^{-a^2/2n} \quad .$$

3. Poser $a_n = c(2n\ln(n))^{1/2}$ avec $c > 1$. Déduire du lemme de Borel-Cantelli que
$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} N_n((2n\ln(n))^{-1/2}) < c) = 1 \ .$$
En déduire que
$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} N_n((2n\ln(n))^{-1/2}) \le 1) = 1 \ .$$

Exercice 5 Construction d'une permutation aléatoire

On veut construire une permutation aléatoire sur $\{1,2,\ldots,n\}$ qui est uniformement distribuée. On dispose d'un oracle qui produit une suite de nombres uniformement distribués et indépendants dans l'ensemble $\{1,2,\ldots,k\}$ avec $k \ge n$.

On construit une injection $f : \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,k\}$ itérativement en fixant $f(j)$ au premier nombre de l'oracle pour lequel $f(i) \ne f(j)$ pour tout $i < j$.

1. Expliquer comment obtenir une permutation à partir d'une injection f et démontrer que cette permutation est uniformement distribuée.
2. Dans les deux cas $k = n$ et $k = 2n$, trouver le nombre espéré de consultations de l'oracle.
3. Dans le cas $k = 2n$, trouver une borne de Chernoff pour la probabilité que le nombre de consultations soit plus grand que $4n$.

Exercice 6 File d'attente

On considère une file d'attente : des clients arrivent et font la queue devant un guichet. Le guichet sert un client à la fois. On note X_n le nombre de clients dans le file (y compris celui qui est en train d'être servi) juste avant le départ du n-ième client et A_{n+1} le nombre de clients arrivant dans la file entre les instants du $n+1$-ième début de service (non compris) et du $n+1$-ième départ (compris). On suppose aussi que A_{n+1} est indépendant de X_n et que (A_n) est une suite de v.a. indépendantes et identiquement distribuées.

On a donc que
$$X_{n+1} = \max(X_n - 1, 0) + A_{n+1} \ .$$

On note Φ_a la fonction génératrice de A_n et Φ_n celle de X_n. On note aussi $\pi_n(0) = \mathbb{P}(X_n = 0)$.

1. Donner une relation entre Φ_n et Φ_{n+1}.

On veut maintenant trouver des conditions pour que la file soit dans un état *stationnaire*, c'est-à-dire que $\forall n,\ \Phi_n = \Phi_{n+1}$.

2. Montrer qu'alors, on doit avoir $\mathbb{E}A_n \le 1$ et que si $\mathbb{E}A_n = 1$, alors $\mathbb{P}(A_n = 1) = 1$ et $\forall n \ge 1,\ X_n = X_1$.

Exercice 7 Chaîne postale

Une chaîne postale consiste à acheter une liste de m noms. L'acheteur donne une somme a au vendeur et a à la personne en tête de liste. Il raye ensuite ce premier nom et ajoute son nom en fin de liste, et tente alord de revendre la nouvelle liste à autant de personne que possible, selon le même principe.

Soit $p(n)$ la probabilité qu'un acheteur réussisse à revendre sa liste à n personnes.

À quelle condition sur p l'acheteur peut-il espérer rentrer dans ses frais ? Quelle est son espérance de gain ?