Structures et algorithmes aléatoires
TD4

30 octobre 2015

Exercice 1 Coloriage

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté et supposons qu'à chaque sommet $v \in V$ est associé un ensemble $S(v)$ de $8r$ couleurs, $r \geq 1$. En outre, pour chaque sommet v et chaque couleur $c \in S(v)$, il y a au plus r voisins u de v tels que $c \in S(u)$.

Montrer qu'il existe alors un coloriage propre (pas deux sommets adjacents avec la même couleur) tel que pour tout v, la couleur associée à v est choisie dans $S(v)$.

Exercice 2 Ensembles indépendants dans le cycle

Trouver un c avec la propriété suivante : Soit $G = (V, E)$ le cycle de longueur cn et soit $V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n$ une partition tel que $|V_i| = c$ pour tout i. Alors il existe un ensemble indépendant qui contient exactément un élément de chaque V_i.

Exercice 3 Lemme local de Lovász général

Le but de cet exercice est de montrer le théorème suivant :

Soient $E_1, \ldots, E_n$ des événements dans un espace de probabilité arbitraire, et $G = (V, E)$ le graphe de dépendance de ces événements. S'il existe des nombres $x_1, \ldots, x_n \in [0, 1[$ tels que pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$P(E_i) \leq x_i \prod_{j:(i,j)\in E} (1 - x_j),$$

alors

$$P(\cap_{i=1}^n \bar{E}_i) \geq \prod_{i=1}^n (1 - x_i) > 0.$$

Soit $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$. On va montrer par récurrence sur s que si $|S| \leq s$, alors $P(\cap_{j\in S} \bar{E}_j) \geq \prod_{j\in S}(1 - x_j) > 0$ et pour tout k,

$$P(E_k \mid \cap_{j\in S} \bar{E}_j) \leq x_k. \qquad \text{(H)}$$

1. Montrer que ceci est vrai pour $s = 0$.
   On suppose que la propriété est vraie pour s, et on considère un ensemble S de cardinal $s + 1$.
2. Montrer que $P(\cap_{j\in S} \bar{E}_j) \geq \prod_{j\in S}(1 - x_j) > 0$.
   On fixe k, on pose $S_1 = \{j \in S \mid (k, j) \in E\}$ et $S_2 = S - S_1$, ainsi que $F_1 = \cap_{j\in S_1} \bar{E}_j$, $F_2 = \cap_{j\in S_2} \bar{E}_j$ et $F = F_1 \cap F_2$.
3. Montrer que (H) est satisfaite si $S_2 = S$.
4. Montrer que $P(E_k \mid F) = \frac{P(E_k \cap F_1 \mid F_2)}{P(F_1 \mid F_2)}$.
5. Montrer que $P(E_k \cap F_1 \mid F_2) \leq x_k \prod_{j:(k,j)\in E}(1 - x_j)$ et que $P(F_1 \mid F_2) \geq \prod_{j:(k,j)\in E}(1 - x_j)$. En déduire que (H) est satisfaite.
6. Conclure.
7. En déduire le corollaire suivant (Lemme local de Lovász asymétrique) :
   Soient $E_1, \ldots, E_n$ des événements dans un espace de probabilité arbitraire, et $G = (V, E)$ le graphe de dépendance de ces événements. pour tout $1 \leq i \leq n$, $\sum_{j:(i,j)\in E} P(E_j) \leq 1/4$, alors $P(\cap_{i=1}^n \bar{E}_i) > 0$.

Exercice 4 Nombre de Ramsey

Soit K_n le graphe complet (clique) de taille n. Le nombre de Ramsey $R(k,\ell)$ est le plus petit entier n tel que pour tout coloriage des arêtes de K_n avec deux couleurs (bleu et rouge), il y a soit une clique rouge de taille k, soit une clique bleue de taille ℓ.

On s'intéresse tout d'abord aux nombres de Ramsey diagonaux : $R(k,k)$.

1. Montrer que si $4\binom{k}{2}\binom{n-2}{k-2}2^{1-\binom{k}{2}} \leq 1$, alors $R(k,k) > n$.
2. En déduire que $R(k,k) > (\sqrt{2}/e)(1+o(1))k2^{k/2}$.
   On s'intéresse maintenant au cas non-diagonal, par exemple, à $R(k,3)$. On colorie chaque arête de K_n en bleu avec probabilité p et en rouge avec probabilité $q = 1-p$.
3. Calculer la probabilité des événements A_T que le triangle T soit bleu, B_S que la clique S soit rouge, et les degrés de dépendance de ces événements autres événements $A_{T'}$, puis aux événements $B_{S'}$.
4. Montrer que l'on peut appliquer le lemme de Lovász avec $p = c_1 n^{-1/2}$, $k = c_2 n^{1/2} \log n$, $x = c_3 n^{-3/2}$ et $y = c_4/\binom{n}{k}$.
5. En déduire que $R(k,3) > c_5 k^2/\log^2 k$.