Structures et algorithmes aléatoires

TD3

16 octobre 2015

Exercice 1 Points fixes d'une permutation

Quelles est la variance du nombre de points fixes d'une permutation sur $\{1, \dots, n\}$ pour une distribution uniforme des permutations ?

Exercice 2 Loi faible des grands nombres

Soit $X_1, X_2, X_3, \dots$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées. Supposons que la variance des X_i est finie. Montrer en utilisant l'inégalité de Chebyshev que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \mu \right| > \varepsilon \right) = 0$$

pour tout $\varepsilon > 0$ où μ est l'espérance des X_i .

Exercice 3 Inégalité de Kraft

Soit F un ensemble fini de mots binaires tel que aucun mot dans F n'est préfixe d'un autre mot dans F . Montrer que

$$\sum_{k \geq 0} \frac{N_k}{2^k} \leq 1$$

où $N_k = |\{f \in F \mid \ell(f) = k\}|$ et $\ell(f)$ est la longueur du mot f .

Exercice 4 Nombre de triangles d'un graphe

On note $G_{n,p}$ l'espace probabilisé des graphes Erdős-Renyi à n sommets et de probabilité p pour chaque arête. Considérons un graphe de $G_{n,p}$ avec $p = 1/n$. Soit X son nombre de triangles.

1. Montrer que $\mathbb{P}(X \geq 1) \leq 1/6$.
2. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X \geq 1) \geq 1/7$.

Exercice 5 Propriétés vraies pour presque tout graphe

Soit Q une propriété. On dit que Q est vraie pour presque tout graphe dans un espace de probabilités Ω_n constitué des graphes à n sommets si

$$P(G \in \Omega_n \text{ tel que } G \text{ satisfait la propriété } Q) \rightarrow 1 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

On prend $\Omega_n = \mathcal{G}(n, p)$ et on suppose $0 < p < 1$ fixé.

1. Soit $1 \leq h \leq k$ deux entiers naturels. Montrer que presque tout graphe $G_{n,p} = (V, E)$ de $\mathcal{G}(n, p)$ satisfait la propriété suivante :
pour toute suite de k sommets $x_1, \dots, x_k$, il existe un sommet x tel que $xx_i \in E$ pour tout $1 \leq i \leq h$ et $xx_i \notin E$ pour tout $h < i \leq k$.
2. En déduire que les propriétés suivantes sont vraies pour presque tout graphe :
 - presque tout graphe $G_{n,p}$ a un diamètre de 2 ;
 - pour un entier k fixé, un graphe $G_{n,p}$ est de degré minimal au moins k .

Exercice 6 Recherche de la médiane

On considère l'algorithme suivant :

Données: Un ensemble S de n entiers

Résultat: La médiane de S , noté m

début

Choisir un multi-ensemble R de $\lceil n^{3/4} \rceil$ éléments de S choisis uniformément et indépendamment;

Trier R ;

Soit d le $\lfloor \frac{1}{2}n^{3/4} - \sqrt{n} \rfloor$ -ième plus petit élément de R ;

Soit u le $\lceil \frac{1}{2}n^{3/4} + \sqrt{n} \rceil$ -ième plus petit élément de R ;

Comparer tous les éléments de S à d et u . Soient $C = \{x \in S \mid d \leq x \leq u\}$, $\ell_d = |\{x \in S \mid x < d\}|$ et $\ell_u = |\{x \in S \mid x > u\}|$;

si $\ell_d > n/2$ **ou** $\ell_u > n/2$ **alors** ÉCHEC;

sinon si $|C| > 4n^{3/4}$ **alors** ÉCHEC;

sinon

Trier C ;

Retourner le $\lfloor n/2 \rfloor - \ell_d + 1$ -ième élément de C trié.

fin

fin

Algorithm 1: Calcul de la médiane randomisé

1. Expliquer pourquoi cet algorithme termine en $O(n)$ et pourquoi cet algorithme renvoie soit ÉCHEC soit la bonne réponse

On veut maintenant connaître la probabilité que la réponse soit ÉCHEC. Un ÉCHEC appartient à au moins un de ces trois événements :

– $\mathcal{E}_1 : Y_1 = |\{r \in R \mid r \leq m\}| < \frac{1}{2}n^{3/4} - \sqrt{n}$;

– $\mathcal{E}_2 : Y_2 = |\{r \in R \mid r \geq m\}| < \frac{1}{2}n^{3/4} - \sqrt{n}$;

– $\mathcal{E}_3 : |C| > 4n^{3/4}$.

2. Montrer que $\mathbb{P}(\mathcal{E}_1) = \mathbb{P}(\mathcal{E}_2) \leq \frac{1}{4}n^{-1/4}$.

3. Montrer que $\mathbb{P}(\mathcal{E}_3) \leq \frac{1}{2}n^{-1/4}$.

4. Conclure.

Exercice 7 Ensembles sans somme

On appelle un ensemble $A \subseteq \mathbb{Z}$ d'entiers *sans somme* s'il n'existe pas de triple $(a, b, c) \in A^3$ tel que $a + b = c$. On veut montrer que tout ensemble B d'entiers non nuls contient un ensemble $A \subseteq B$ sans somme tel que $|A| > |B|/3$.

Soit p un nombre premier de la forme $p = 3k + 2$ tel que $p > 2|b|$ pour tout $b \in B$. Posons $C = \{k + 1, k + 2, \dots, 2k + 1\}$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(\exists c \in C : bX \equiv c \pmod{p}) > 1/3$ pour tout $b \in B$ si X est tiré uniformément entre 1 et $p - 1$.
2. Conclure.