Structures et algorithmes aléatoires
TD2

3 octobre 2014

Exercice 1 Quelques espérances et variances

1. Quelle est l'espérance et la variance d'un réel tiré uniformement de l'intervalle $[1,n]$?
2. Quelle est l'espérance et la variance d'un réel tiré uniformement de l'intervalle $[-k,k]$?
3. On jète un dé 100 fois. Borner la probabilité que la somme des résultats soit entre 300 et 400.
4. On jète un dé jusqu'à ce qu'on ait obtenu deux 6 consécutifs. Quel est le nombre espéré de jets ?
5. On est donné un algorithme qui prend une chaine de n bits comme entrée et qui a une complexité en temps espérée de $O(n^2)$ si l'entrée est uniformement distribuée. Que peut-on dire de la complexité en temps dans le pire cas ?

Exercice 2 Points fixes d'une permutation

Quelles sont l'espérance et la variance du nombre de points fixes d'une permutation sur $\{1,\dots,n\}$ pour une distribution uniforme des permutations ?

Exercice 3 Maximum et minimum

On jète deux dés non biaisés à k faces numérotées $1,2,\dots,k$. Dénotons les résultats des dés par X_1 et X_2.

1. Quelles sont les espérances de $\max\{X_1,X_2\}$ et $\min\{X_1,X_2\}$?
2. Montrer l'égalité $\mathbb{E}\big(\max\{X_1,X_2\}\big)+\mathbb{E}\big(\min\{X_1,X_2\}\big)=\mathbb{E}X_1+\mathbb{E}X_2$ en utilisant la linéarité de l'espérance.

Exercice 4 Inégalité de Jensen

Soit U un intervalle réel. Une fonction $f:U\to\mathbb{R}$ est convexe si elle satisfait $f\big((1-\lambda)a+\lambda b\big)\le(1-\lambda)f(a)+\lambda f(b)$ pour tout $a,b\in U$ et $\lambda\in[0,1]$.

Soit X une variable aléatoire sur U et f une fonction convexe sur U. Montrer que $f(\mathbb{E}X)\le\mathbb{E}f(X)$ si les deux espérances existent.

Exercice 5 Loi faible des grands nombres

Soit $X_1,X_2,X_3,\dots$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées. Supposons que la variance des X_i est finie. Montrer en utilisant l'inégalité de Chebyshev que

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-\mu\right|>\varepsilon\right)=0$$

pour tout $\varepsilon>0$ où μ est l'espérance des X_i.

Exercice 6 Tri rapide

On rappelle l'algorithme du tri rapide :

Données: Une liste S de n entiers distinct
Résultat: La liste triée des éléments de S
début
  si *S a 0 ou 1 élément* **alors** retourner S **sinon**
    Choisir un élément x (pivot) de S et diviser les autres éléments en deux sous-listes
    – S_1, liste des éléments de S qui sont $< x$;
    – S_2, liste des éléments de S qui sont $> x$;
    Tri_Rapide($S1$) ; Tri_rapide(S_2);
    Retourner la liste S_1, x, S_2.
  fin
fin

Algorithm 1: Tri_Rapide

On veut montrer que si les pivots sont choisis indépendamment et uniformément, alors l'espérance du nombre de comparaisons est de $2n \ln n + O(n)$. On note $y_1 < y_2 < \cdots < y_n$ les éléments de la liste.

1. Donner un exemple de liste qui nécessite $\Omega(n^2)$ comparaisons pour la trier avec cet algorithme.
2. Quelle est la probabilité que deux éléments y_i at y_j soient comparés ?
3. En déduire le résultat.
4. Que se passe-t-il si on choisit toujours le premier élément de la liste comme pivot ? Quelle est la différence avec le choix d'un pivot aléatoire ?

Exercice 7 Recherche de la médiane

On considère l'algorithme suivant :

Données: Un ensemble S de n entiers
Résultat: La médiane de S, noté m
début
  Choisir un multi-ensemble R de $\lceil n^{3/4} \rceil$ éléments de S choisis uniformément et indépendamment;
  Trier R;
  Soit d le $\lfloor \frac{1}{2} n^{3/4} - \sqrt{(n)} \rfloor$-ième plus petit élément de R;
  Soit u le $\lceil \frac{1}{2} n^{3/4} + \sqrt{(n)} \rceil$-ième plus petit élément de R;
  Comparer tous les éléments de S à d et u. Soient $C = \{x \in S \mid d \leq x \leq u\}$, $\ell_d = |\{x \in S \mid x < d\}|$ et $\ell_u = |\{x \in S \mid x > u\}|$;
  si *$\ell_d > n/2$ ou $\ell_u > n/2$* **alors** ÉCHEC;
  sinon si $|C| > 4n^{3/4}$ **alors** ÉCHEC;
  sinon
    Trier C;
    Retourner le $\lfloor n/2 \rfloor - \ell_d + 1$-ième élément de C trié.
  fin
fin

Algorithm 2: Calcul de la médiane randomisé

1. Expliquer pourquoi cet algorithme termine en $O(n)$ et pourquoi cet algorithme renvoie soit ÉCHEC soit la bonne réponse

On veut maintenant connaître la probabilité que la réponse soit ÉCHEC. Un ÉCHEC appartient à au moins un de ces trois événements :

- $\mathscr{E}_1 : Y_1 = |\{r \in R \mid r \leq m\}| < \frac{1}{2} n^{3/4} - \sqrt{n}$;
- $\mathscr{E}_2 : Y_2 = |\{r \in R \mid r \geq m\}| < \frac{1}{2} n^{3/4} - \sqrt{n}$;
- $\mathscr{E}_3 : |C| > 4n^{3/4}$.

2. Montrer que $\mathbb{P}(\mathscr{E}_1) = \mathbb{P}(\mathscr{E}_2) \leq \frac{1}{4} n^{-1/4}$.
3. Montrer que $\mathbb{P}(\mathscr{E}_3) \leq \frac{1}{2} n^{-1/4}$.
4. Conclure.