

LA MÉTHODE PROBABILISTE — MÉTHODE DU PREMIER MOMENT

Exercice 1

Usines de montres

Deux usines A et B produisent des montres. L'usine A produit une montre défectueuse sur 100 et B une sur 200 (on supposera les états des montres indépendants). Un détaillant reçoit une caisse de n montres de chacune des usines, sans pouvoir connaître l'origine des caisses. Il ouvre une caisse au hasard, prend une montre au hasard et vérifie l'état de cette montre, qui fonctionne.

Quelle est alors la probabilité qu'une seconde montre prise au hasard dans la même caisse fonctionne aussi ?

Exercice 2

Points fixes d'une permutation

Quelles sont l'espérance et la variance du nombre de points fixes d'une permutation sur $\{1, \dots, n\}$ pour une distribution uniforme des permutations ?

Exercice 3

Analyse du tri rapide

On rappelle l'algorithme du tri rapide :

Données : Une liste S de n entiers distinct
Résultat : La liste triée des éléments de S
début
 si S a 0 ou 1 élément **alors** retourner S ;
 sinon
 Choisir un élément x (pivot) de S et diviser les autres éléments en deux sous-listes
 — S_1 , liste des éléments de S qui sont $< x$;
 — S_2 , liste des éléments de S qui sont $> x$;
 Tri_Rapide(S_1); Tri_rapide(S_2);
 Retourner la liste S_1, x, S_2 .
 fin
fin

Algorithme 1 : Tri_Rapide

1. Donner un exemple de liste qui nécessite $\Omega(n^2)$ comparaisons pour la trier avec cet algorithme.

On veut montrer que si les pivots sont choisis indépendamment et uniformément, alors l'espérance du nombre de comparaisons est de $2n \ln n + O(n)$. On note $y_1 < y_2 < \dots < y_n$ les éléments de la liste.

2. Quelle est la probabilité que deux éléments y_i et y_j soient comparés ?
3. En déduire le résultat.
4. Que se passe-t-il si on choisit toujours le premier élément de la liste comme pivot ? Quelle est la différence avec le choix d'un pivot aléatoire ?

Exercice 4

Recherche de la médiane

On considère l'algorithme suivant :

1. Expliquer pourquoi cet algorithme termine en $O(n)$ et pourquoi cet algorithme renvoie soit ÉCHEC soit la bonne réponse.

On veut maintenant connaître la probabilité que la réponse soit ÉCHEC. Un ÉCHEC appartient à au moins un de ces trois événements :

- $\mathcal{E}_1 : Y_1 = |\{r \in R \mid r \leq m\}| < \frac{1}{2}n^{3/4} - \sqrt{n}$;
- $\mathcal{E}_2 : Y_2 = |\{r \in R \mid r \geq m\}| < \frac{1}{2}n^{3/4} - \sqrt{n}$;

Données : Un ensemble S de n entiers

Résultat : La médiane de S , noté m

début

Choisir un multi-ensemble R de $\lceil n^{3/4} \rceil$ éléments de S choisis uniformément et indépendamment;

Trier R ;

Soit d le $\lfloor \frac{1}{2}n^{3/4} - \sqrt{n} \rfloor$ -ième plus petit élément de R ;

Soit u le $\lceil \frac{1}{2}n^{3/4} + \sqrt{n} \rceil$ -ième plus petit élément de R ;

Comparer tous les éléments de S à d et u . Soient $C = \{x \in S \mid d \leq x \leq u\}$,

$\ell_d = |\{x \in S \mid x < d\}|$ et $\ell_u = |\{x \in S \mid x > u\}|$;

si $\ell_d > n/2$ **ou** $\ell_u > n/2$ **alors** ÉCHEC;

;

sinon si $|C| > 4n^{3/4}$ **alors** ÉCHEC;

;

sinon

 Trier C ;

 Retourner le $\lfloor n/2 \rfloor - \ell_d + 1$ -ième élément de C trié.

fin

fin

Algorithme 2 : Calcul de la médiane randomisé

- $\mathcal{E}_3 : |C| > 4n^{3/4}$.
- 2. Montrer que $P(\mathcal{E}_1) = P(\mathcal{E}_2) \leq \frac{1}{4}n^{-1/4}$.
- 3. Montrer que $P(\mathcal{E}_3) \leq \frac{1}{2}n^{-1/4}$.
- 4. Conclure.

Exercice 5

Jeu

Deux joueurs jouent le jeu suivant. Au début, k jetons sont placés sur la case 0 d'un jeu comportant $n + 1$ cases numérotées de 0 à n . À chaque tour, le joueur 1 sélectionne deux ensembles disjoints de jetons (pas forcément une partition). Le joueur 2 sélectionne alors un de ces deux ensembles et retire les jetons du jeu. Les jetons de l'autre ensemble avancent d'une case. Le joueur 1 gagne si un jeton atteint la case n . Sinon, c'est le joueur 2 qui gagne.

1. Donner une stratégie gagnante pour le joueur 1 si $k \geq 2^n$.
2. Montrer que le joueur 2 a une stratégie gagnante si $k < 2^n$.
3. Utiliser les espérances conditionnelles pour construire cette stratégie gagnante.

Exercice 6

Deux événements disjoints de probabilité non nulle peuvent-ils être indépendants ?

Exercice 7

1. Donner un exemple d'espace de probabilité avec trois événements A_1, A_2, A_3 indépendants deux à deux mais pas globalement indépendants.
2. Soit $\{A_i\}_{i \in I}$ une famille indépendante d'événements. Est-ce que $\{\tilde{A}_i\}_{i \in I}$ est aussi une famille indépendante, quand pour tout $i \in I$, $\tilde{A}_i \in \{A_i, \bar{A}_i\}$?

Exercice 8

Pile ou face : inégalités

On lance une pièce non biaisée n fois. En utilisant les inégalités de Markov et Chebyshev, donner deux bornes sur la probabilité d'obtenir au moins $3n/4$ fois face.