Simulation de chaînes de Markov et temps de mélange

Exercice 1 **Chaîne de Metropolis**

Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur un espace d'états fini E. Le but de cet exercice est de modifier les probabilités de transition de $\{X_n\}$ de telle sorte que la distribution stationnaire soit une distribution π donnée (on ne connaît pas la distribution de la chaîne initiale) et la chaîne obtenue réversible.

Pour ce faire, on passe d'un état à l'autre de la manière suivante. Si au temps n, la chaîne est dans l'état x, on tire l'état y selon les probabilités de transition de la chaîne, et à l'instant $n+1$, on va dans l'état y avec probabilité $a(x,y)$ et avec probabilité $1-a(x,y)$, on reste dans l'état x.

1. Donner les probabilités de transition de la chaîne de Markov obtenue.

2. Si l'on veut obtenir une chaîne de probabilité stationnaire π, comment peut-on choisir les $a(x,y)$ de manière à les maximiser ?

3. Soit G un graphe non-orienté, que l'on ne connaît pas dans son ensemble, mais que l'on peut parcourir en se déplaçant de proche en proche sur ses sommets. Quand un sommet est visité, on connaît ses voisins, et on peut donc effectuer une marche aléatoire sur les graphes. On désire un échantillon uniforme des sommets, c'est-à-dire, définir une marche aléatoire qui a une distribution uniforme sur ce graphe. Comment faire ?

Exercice 2 **Temps de couverture**

Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire sur le cycle de longueur n. Le temps de couverture τ_{cov} d'une chaîne de Markov est le premier temps auquel tous les états ont été visités. Le pire temps de couverture moyen est

$$t_{cov} = \max_{x\in E} \mathbf{E}_x(\tau_{cov}).$$

Le but de cet exercice est de calculer le temps de couverture pour le cycle de longueur n.

Considérons tout d'abord la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$. On note c_k le premier temps auquel k états ont été visités.

1. Donner une relation de récurrence entre $\mathbf{E}[c_k]$ et $\mathbf{E}[c_{k-1}]$.

2. En déduire $\mathbf{E}[c_n]$.

3. En déduire le temps de couverture du cycle de longueur n.

Exercice 3 **Temps d'atteinte et de couverture**

Soit $\{X_n\}$ une chaîne de Markov sur un espace d'états fini E. Le temps d'atteinte d'un état x est noté τ_x. On définit t_{hit} le pire temps d'atteinte moyen comme

$$t_{hit} = \max_{x,y\in E} \mathbf{E}_x(\tau_y).$$

1. Montrer que $t_{hit} \leq t_{cov}$.

Soient x l'état initial et σ une permutation sur E choisie de manière uniforme et indépendante de la chaîne. Soit T_k le premier temps auquel les états $\sigma(1),\dots,\sigma(k)$ ont tous été visités.

2. Montrer que $\mathbf{E}_x(T_1) \leq t_{hit}$.

Soit $L_k = X_{T_k}$. Étant donnés deux états r et s distincts, on définit l'événement $A_k(r,s) = \{\sigma(k-1) = r \text{ et } \sigma(k) = L_k = s\}$, ainsi que $A_k = \cup_{r \neq s} A_k(r,s)$.

3. Calculer $\mathbf{E}_x(T_k - T_{k-1} \mid A_k^c)$ et borner $\mathbf{E}_x(T_k - T_{k-1} \mid A_k)$.

4. En déduire que $t_{cov} \leq t_{hit}(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})$.

5. Calculer t_{hit} pour le cycle de longueur n.

`Exercice 4`

Soit $G = (S, A)$ un graphe non-orienté et C un ensemble de couleurs. On note Δ le degré maximal du graphe, et l'on souhaite générer un coloriage propre des sommets de manière aléatoire et uniforme parmi tous les coloriages propres du graphe par des techniques de simulation de chaînes de Markov Monte-Carlo. On rappelle qu'un coloriage propre est un coloriage des sommets tels que deux sommets voisins ne sont pas de la même couleur. Plus formellement, un coloriage est une fonction $c : S \to C$ tel que $c(u) = c(v) \Rightarrow \{u,v\} \notin A$.

1. Proposer une fonction de représentation d'une chaîne de Markov irréductible apériodique, récurrente positive et réversible dont la distribution stationnaire est la distribution uniforme sur tous les coloriages propres. Combien de couleurs sont nécessaires pour que cette chaîne soit vraiment irréductible ?

On suppose que $|C| \geq 4\Delta + 1$ et on veut montrer qu'alors, $\tau(\epsilon)$, le temps de mélange de la chaîne satisfait

$$\tau(\epsilon) \leq \left\lceil \frac{|S||C|}{|C| - 4\Delta} \ln \frac{|S|}{\epsilon} \right\rceil.$$

Pour se faire, on construit un couplage de la chaîne définie à la question précédente.

2. Proposer un couplage (X_n^1, X_n^2).

On note D_n l'ensemble des sommets coloriés différemment entre X_n^1 et X_n^2 et $d_n = |D_n|$.

3. Donner une borne inférieure en fonction de d_n pour $\mathbf{P}(d_{n+1} = d_n - 1 \mid d_n > 0)$ et une borne supérieure pour $\mathbf{P}(d_{n+1} = d_n + 1 \mid d_n > 0)$.

4. En déduire une borne supérieure pour $\mathbf{E}[d_{n+1} \mid d_n]$ et donc que

$$\mathbf{E}[d_n] \leq |S| \left(1 - \frac{|C| - 4\Delta}{|S||C|}\right)^n.$$

5. Conclure quant au temps de mélange de la chaîne.