Structures et algorithmes aléatoires
TD10

9 décembre 2015

Exercice 1 La chaîne serpent

Soit $\{X_n\}_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov homogène d'espace d'état E et de matrice de transition P. Pour $L \geq 1$, on définit $Y_n = (X_n, X_{n+1} \dots, X_{n+L})$.

1. Le processus $\{Y_n\}_n$ prend ses valeurs dans $F = E^{L+1}$. Montrer que c'est une chaîne de Markov homogène et donner sa matrice de transition.
2. Montrer que si $\{X_n\}$ est irréductible, il en est de même pour $\{Y_n\}$ si on restreint l'espace de cette dernière à $F = \{(i_0, \dots, i_L) \in E^{L+1} \mid p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{L-1} i_L} > 0\}$.
3. Montrer que $\{Y_n\}$ est récurrent positive si et seulement si $\{X_n\}$ l'est. Quelle est alors la distribution stationnaire de $\{Y_n\}$ en fonction de celle de $\{X_n\}$?

Exercice 2 Chaîne produit

Soient $\{X_n\}$ et $\{Y_n\}$ deux chaînes de Markov indépendantes de la même matrice de transition P. On définit la chaîne produit $U_n = (X_n, Y_n)$.

1. Montrer que $\{U_n\}$ est une chaîne de Markov.
2. Quelle est la matrice de transition de $\{U_n\}$?
3. Montrer que $\{U_n\}$ est irréductible si P est irreductible et apériodique. Est-ce nécessaire de supposer que P est apériodique ?
4. Soit $\{Z_n^k\}$ le produit de $k \geq 2$ marches aléatoires à une dimension. Cette chaîne est-elle irréductible ? Montrer que dans le cas symétrique, l'état $(0, \dots, 0)$ est récurrent pour $k = 2$ et transitoire pour $k \geq 3$.

Exercice 3 Apériodicité

Soit $\{X_n\}_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov irreductible à espace d'états fini.

1. Supposons qu'il existe un état x tel que $\mathbb{P}(X_{n+1} = x \mid X_n = x) > 0$. Montrer que $\{X_n\}$ est apériodique.
2. Donner un exemple d'une chaîne apériodique qui ne possède pas cette propriété.
3. Supposons que $\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x) > 0$ si et seulement si $\mathbb{P}(X_{n+1} = x \mid X_n = y) > 0$. Montrer que $\{X_n\}$ est apériodique si et seulement s'il existe un entier positif impair k et un état x_0 tel que $\mathbb{P}(X_{n+k} = x_0 \mid X_n = x_0) > 0$.