Première partie

Exercice 1 **Composantes connexes de taille 2**

On se place dans le cadre des graphes aléatoires Erdoš-Rényi, dans l'espace $\mathcal{G}(n,p)$, où p pourra varier avec n. On note $C(n)$ la variable aléatoire du nombre de composantes connexes de taille 2 d'un graphe de $\mathcal{G}(n,p)$.

1. Quelle est l'espérance du nombre de composantes connexes de taille 2 dans $\mathcal{G}(n,p)$.

2. En déduire que si $\ln n/n = o(p(n))$, alors $\lim_{n\to\infty} P(C(n) \neq 0) = 0$.

3. Calculer $\mathbb{E}(C(n)^2)$. En déduire que $Var(C(n)) \leq E[C(n)] + \frac{1-(1-p)^4}{(1-p)^4} E[C(n)]^2$.

4. En déduire que si $1/n^2 \ll p(n) \leq 1/n$, alors $\lim_{n\to\infty} P(C(n) = 0) = 0$.

Exercice 2 **Technique de la médiane**

Soit P une propriété et A un algorithme probabiliste qui à ne entrée u vérifie si la prpriété P est satisfaite pour u. Pour chaque entrée, la probabilité que l'algorithme retourne une répounse fausse est au plus $p < 1/2$, et ce, indépendemment de l'instance u et du fait que u satisfait la propriété P ou non.

On propose l'algoritme suivant : on exécute A n fois sur l'entrée u (les réponses retournées sont mutuellement indépendentes) et on renvoie la réponse la plus fréquente.

1. Montrer que la probabilité de retourner la mauvaise réponse est alors au plus

$$e^{-np(\frac{1}{p}-1)^2}.$$

On suppose maintenant que l'on a un problème Q, dont la réponse est une valeur entière. On note $Q(u)$ la réponse au problème sur l'éntrée u. On dispose d'un algorithme probabiliste B qui se trompe avec un facteur α au plus, c'est-à-dire, tel que

$$P(1/\alpha \leq \frac{Q(u)}{B(u)} \leq \alpha) \geq 1-q.$$

On exécute B s fois sur u (indépendemment à chaque fois) et on retourne la médiane du résultat.

2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $s \in \mathbb{N}$ tel que

$$P(1/\alpha \leq \frac{Q(u)}{B(u)} \leq \alpha) \geq 1-\varepsilon.$$