EXAMEN DU COURS STRUCTURES ET ALGORITHMES ALEATOIRES

ENS, Janvier 2011

F. Baccelli, P. Brémaud

Exercice 1 : Graphes aléatoires d'intersection On considère le *graphe aléatoire d'intersection*, $G(n, m, k)$, défini comme suit. Soit V un ensemble de n nœuds et M un ensemble de m couleurs. À chaque nœud $v \in V$, on associe un sous-ensemble $F_v \subseteq M$ de k couleurs distinctes, choisies au hasard et uniformément parmi les sous-ensembles de cardinal $k \leq m$ de M. Les sous-ensembles des divers nœuds sont indépendants. On joint deux nœuds distincts $u, v \in V$ par un arc ssi $F_u \cap F_v \neq \emptyset$.

1. Calculer la probabilité p qu'il y ait un arc entre deux nœuds distincts ainsi que le degré moyen d'un nœud de $G(n, m, k)$.
2. Le graphe aléatoire $G(n, m, k)$ a-t-il la même loi que le graphe aléatoire d'Erdős–Rényi sur n nœuds et de paramètre p? [on pourra considérer la probabilité que trois nœuds distincts soient les sommets d'un triangle dans $G(n, m, k)$ et dans ce graphe d'Erdős–Rényi].

On suppose ci-dessous que k et m sont des fonctions de n telles que $m(n) \geq k(n) \geq 1$. On s'intéresse d'abord à la probabilité, notée $i(n)$, que $G(n, m, k)$ contienne des nœuds isolés.

3. Montrer que si
$$\frac{k(n)^2 n}{m(n)} = (\log n) + \omega(n) \tag{1}$$
avec $\omega(n) \to \infty$ quand $n \to \infty$, alors $i(n) \to_{n\to\infty} 0$.
4. Montrer que si
$$\frac{k(n)^2 n}{m(n)} = (\log n) - \omega(n) \tag{2}$$

avec $\omega(n) \to \infty$ quand $n \to \infty$, alors le nombre moyen de nœuds isolés tend vers l'infini avec n. En déduire que sous cette condition, $i(n) \to_{n\to\infty} 1$.

On s'intéresse maintenant à la question de la connectivité. Soit $c(n)$ la probabilité que $G(n,m,k)$ soit connecté.

5. Montrer que sous (2), $c(n) \to_{n\to\infty} 0$.
6. Pour conclure, on étudie une condition suffisante pour que $c(n) \to_{n\to\infty} 1$. On se place dans le cas particulier où $k(n) \geq 2$.

   6a Soit $A(n)$ l'événement: chaque sous-ensemble de cardinal $k(n)$ de M est attribué à au moins un des nœuds. Montrer que sur cet événement, il existe un chemin de longueur au plus 2 entre toute paire de nœuds.

   6b En déduire que si

   $$\binom{m(n)}{k(n)} \left(1 - \frac{1}{\binom{m(n)}{k(n)}}\right)^n \to_{n\to\infty} 0, \tag{3}$$

   alors $c(n) \to_{n\to\infty} 1$.

   6c Étudier quelques cas particuliers [suggestions: (1) $k(n) = k$ et $m(n) = m$; (2) $k(n) = k = 2$ et $m(n) = Cn^{\delta}$ avec $0 < \delta < 1/2$ et $C > 0$].