Devoir maison 3

Les notations qui ne sont pas rappelées sont celles du cours. Vous êtes autorisés à réfléchir à plusieurs sur les exercies (pas plus de deux ou trois). Cependant, la rédaction doit être individuelle et chacun doit rendre une copie. Précisez les noms de vos collaborateurs.

Exercice 1 — Landers de dés

On lance un dé non biaisé de manière répétitive.

Parmi les processus stochastiques suivants, lesquels sont des chaînes de Markov ? (justifier la réponse, donner une représentation des chaînes de Markov le cas échéant, donner ses charactéristiques principales (irréductibilité, période des classes de communication, récurrence...)

(a) $(X_n)_{n\geq 1}$, où X_n est la plus grande valeur obtenue après n lancers ;

(b) $(N_n)_{n\geq 0}$, où N_n est le nombre de 6 obtenus après n lancers ;

(c) $(C_n)_{n\geq 0}$, où C_n est le nombre de lancers depuis le dernier 6 ;

(d) $(B_n)_{n\geq 0}$, où $B_n = \sum_{k=0}^{n} N_k$.

Exercice 2 — Chaîne de Markov réversible et marche aléatoire

Soit $G = (V, E)$ un graphe fini non-orienté. À chaque arête $e \in E$, on associe un poids $w(e) > 0$. Pour tout sommet $u \in V$, $V(u)$ est l'ensemble des voisins de u et on pose $w(u) = \sum_{v\in V(u)} w(\{u, v\})$.

Une marche aléatoire pondérée sur G est une chaîne de Markov de matrice de transition $\mathbf{P}$ telle que $\mathbf{P}_{u,v} = \frac{w(\{u,v\})}{w(u)}$ si $\{u, v\} \in E$ et $\mathbf{P}_{u,v} = 0$ sinon.

1. Montrer qu'une marche aléatoire pondérée est réversible. Quelle est sa probabilité stationnaire ?

2. Montrer qu'une chaîne de Markov réversible est une marche aléatoire pondérée.

Exercice 3 — Temps de couverture

Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire sur le cycle de longueur n. Le temps de couverture τ_{cov} d'une chaîne de Markov est le premier temps auquel tous les états ont été visités. Le pire temps de couverture moyen est

$$t_{cov} = \max_{x\in E} \mathbb{E}_x(\tau_{cov}).$$

Le but de cet exercice est de calculer le temps de couverture pour le cycle de longueur n.

Considérons tout d'abord la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$. On note c_k le premier temps auquel k états ont été visités.

1. Donner une relation de récurrence entre $\mathbb{E}[c_k]$ et $\mathbb{E}[c_{k-1}]$.

2. En déduire $\mathbb{E}[c_n]$.

3. En déduire le temps de couverture du cycle de longueur n.

Exercice 4 — Chaînes transitoires

On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en temps discret avec un espace d'état infini dénombrable. On suppose de plus que le graphe de transition de X_n admet une seule classe finale irréductible, qui ne contient qu'un nombre fini d'états. L'ensemble des états transitoires est noté A.

1. Expliquer comment mettre la matrice de transition de X_n sous forme triangulaire inférieure

$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ R & Q \end{pmatrix}.$$

Expliquer pourquoi dans un tel cas, le comportement asymptotique n'est pas nécessairement unique. Donner tous les comportements possibles, *a priori*.

2. Pour tout $i \in A$, on définit les probabilités $v(i) = P(X_n \in A, \forall n \in \mathbb{N} | X_0 = i)$ et $v_n(i) = P(X_1 \in A, \dots, X_n \in A | X_0 = i)$. Montrer que $v_n \downarrow v$ et donner une formule du vecteur de taille infinie v_n en fonction de Q^n.

3. Montrer que $v = Qv$.

4. Montrer que v est la plus grande solution de l'équation en u, $u = Qu$ qui vérifie $0 \leq u(i) \leq 1$ pour tout i dans A.

5. Montrer que soit $v(i) = 0, \forall i \in A$, soit $\sup_{i \in A} v(i) = 1$.
Donner un exemple d'une chaîne telle que $v = 0$ et d'une autre telle que $\sup_{i \in A} v(i) = 1$.