Devoir maison 5

Exercice 1 **Temps de couverture**

Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire sur le cycle de longueur n. Le temps de couverture τ_{cov} d'une chaîne de Markov est le premier temps auquel tous les états ont été visités. Le pire temps de couverture moyen est

$$t_{cov} = \max_{x\in E} \mathbf{E}_x(\tau_{cov}).$$

Le but de cet exercice est de calculer le temps de couverture pour le cycle de longueur n.

Considérons tout d'abord la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$. On note c_k le premier temps auquel k états ont été visités.

1. Donner une relation de récurrence entre $\mathbf{E}[c_k]$ et $\mathbf{E}[c_{k-1}]$.

2. En déduire $\mathbf{E}[c_n]$.

3. En déduire le temps de couverture du cycle de longueur n.

Exercice 2 **Temps d'atteinte et de couverture**

Soit $\{X_n\}$ une chaîne de Markov sur un espace d'états fini E. Le temps d'atteinte d'un état x est noté τ_x. On définit t_{hit} le pire temps d'atteinte moyen comme

$$t_{hit} = \max_{x,y\in E} \mathbf{E}_x(\tau_y).$$

1. Montrer que $t_{hit} \le t_{cov}$.

Soient x l'état initial et σ une permutation sur E choisie de manière uniforme et indépendante de la chaîne. Soit T_k le premier temps auquel les états $\sigma(1), \dots, \sigma(k)$ ont tous été visités.

2. Montrer que $\mathbf{E}_x(T_1) \le t_{hit}$.

Soit $L_k = X_{T_k}$. Étant donnés deux états r et s distincts, on définit l'événement $A_k(r,s) = \{\sigma(k-1) = r \text{ et } \sigma(k) = L_k = s\}$, ainsi que $A_k = \cup_{r\neq s} A_k(r,s)$.

3. Calculer $\mathbf{E}_x(T_k - T_{k-1} \mid A_k^c)$ et borner $\mathbf{E}_x(T_k - T_{k-1} \mid A_k)$.

4. En déduire que $t_{cov} \le t_{hit}(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})$.

5. Calculer t_{hit} pour le cycle de longueur n.

Exercice 3 **Indépendants de taille fixe**

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté. On veut générer un ensemble indépendant de taille k de manière uniforme. C'est un problème difficile qui n'a pas de solution efficace à ce jour.

La chaîne de Markov est décrite par l'échantillonneur de Gibbs suivant :

1. choisir $v \in X_n$ et $w \in S$ uniformément ;
2. Si $X_n \cup \{w\} \setminus \{v\}$ est un indépendant de taille k, alors $X_{n+1} = X_n \cup \{w\} \setminus \{v\}$. Sinon $X_{n+1} = X_n$.

1. Cette chaîne est-elle apériodique ?

Soit Δ le degré maximum d'un sommet. On suppose dans la suite que $k \le |S|/(3\Delta + 3)$.

2. Montrer que la chaînes est alors irréductible.

3. Montrer que la distribution stationnaire de cette chaîne est bien la distribution uniforme sur tous les indépendants de taille k.

Soient (X_n^1) et (X_n^2) deux chaînes de Markov sur les ensembles indépendants de taille k selon l'échantillonneur de Gibbs ci-dessus. le couplage se fait de la manière suivante :

— Choisir le même w dans les deux chaînes ;

— choisir $v^1 \in X_n^1$ uniformément dans X_n^1. Si $v^1 \in X_n^2$, on choisit le même $v^2 = v^1$, sinon, on choisit v^2 uniformément dans $X_n^2 \setminus X_n^1$.

4. Montrer que le choix de v^2 est uniforme.

On s'intéresse maintenant au temps de couplage. Pour cela, on va étudier $d_n = |X_n^1 - X_n^2|$. Il y a couplage quand $d_n = 0$.

5. Décrire l'évolution possible de d_{n+1} en fonction de d_n (les valeurs possibles et les probabilités correspondantes).

6. Montrer que

$$\mathbf{E}[d_{n+1} \mid d_n = \ell] \leq \ell \left(1 - \frac{|S| - (\Delta + 1)(3k - 3)}{|S|k}\right)$$

7. Montrer que

$$\mathbf{E}[d_{n+1}] \leq k \left(1 - \frac{|S| - (\Delta + 1)(3k - 3)}{|S|k}\right)^n .$$

8. En déduire une borne supérieure du temps de mélange de la chaîne.