Devoir maison 3

Exercice 1 **Touver un chemin dans un graphe dynamique**

On considère un graphe évoluant avec le temps de la manière suivante :
- $G_0 \sim \mathcal{G}(n,p)$ est le graphe initial ;
- à l'instant $t+1$, G_{t+1} est obtenu à partir de G_t en sélectionnant une paire (u,v) de sommets uniformément au hasard et en plaçant une arête entre ces deux sommets avec probabilité p, en n'en plaçant pas avec probabilité $1-p$, indépendamment du reste du graphe et de son évolution passée. Donc G_t et G_{t+1} diffèrent donc d'au plus une arête.

Le but de ce problème des de maintenir un chemin depuis une source S jusqu'à une destination T, alors que les changements dans le graphe sont inconnus. La seule opération possible est de *sonder* un sommet à chaque étape. Sonder u signifie obtenir l'ensemble de ses voisins $N(u)$.

1. Justifier qu'à chaque étape t, $G_t \sim \mathcal{G}(n,p)$.

On suppose que p dépend de n et $\frac{\ln n}{n} \ll p \ll n^{-1/2}$ ($f \ll g$ signifie $f = o(g)$ et $f \gg g$ signifie $g = o(f)$).

2. Expliquer en une phrase pourquoi on choisit $p \gg \frac{\ln n}{n}$.

Fixons u et v deux sommets et soit $T_{u,v}$ l'événement « il existe un chemin entre u et v de longueur au plus 2 ».

3. Montrer que si $p \ll n^{-1/2}$, alors $\mathbf{P}(T_{u,v}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

4. Montrer que si $p \gg n^{-1/2}$, alors $\mathbf{P}(T_{u,v}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

Soit D_u le degré du sommet u.

5. Montrer qu'il existe une constante c telle que pour tout n suffisamment grand $\mathbf{P}(D_u \leq c\ln n) \leq n^{-4}$ et $\mathbf{P}(D_u \geq c\sqrt{n}) \leq n^{-4}$. En déduire une borne inférieure de la probabilité que chaque sommet a un degré au moins $c\ln n$ et au plus $c\sqrt{n}$. *Indication :* d'abord borner p par $a\frac{\ln n}{n-1}$ pour a suffisamment grand, et borner D_u, le degré de u par une variable aléatoire binomiale.

On dit que la propriété A est satisfaite *avec forte probabilité* si $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A) = 1$ (la propriété A dépend de n). Par exemple, « $\max_u D_u \leq c\sqrt{n}$ » est satisfaite avec forte probabilité.

6. Soit B un événement. Montrer que si A est satisfaite avec forte probabilité et $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(B \mid A) = q$, alors $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(B) = q$.

Soit $R = \lceil \sqrt{n/\ln n} \rceil$ et considérons l'algorithme 1, où $S \longrightarrow v$ (resp. $v \longrightarrow T$) est le plus court chemin de A vers v (resp. de v vers T) d'après les sondages effectués par l'algorithme). On veut montrer que la probabilité que l'algorithme retourne un chemin valide est au moins $1-\alpha(n\ln n)^{-1/2}$ pour une constant α (on rappelle qu'à chaque étape (=sondage), le graphe évolue).

L'algorithme construit deux boules autour de S et T en utilisant les sondages. Si ces deux boules s'intersectent, alors l'algorithme retourne un chemin possible de S vers T. Les ensembles V_S et V_T sont les ensembles de sommets *visités* : ils ont été trouvés pas le processus de sondage, puis sondés.

7. Montrer qu'il existe $c' > 0$ tel que à chaque étape et à la fin de l'algorithme, avec forte probabilité, $|B(S)| \leq c'n/\sqrt{\ln n}$.

8. Montrer qu'il existe une constante c'' telle qu'à chaque étape, le nombre de nouveaux sommets découverts ($N(u) \setminus B_S$) est au moins $c'' \ln n$ avec forte probabilité. En déduire qu'à la fin de l'algorithme, $|B_S| \geq c''R\ln n$ avec forte probabilité.

On analyse maintenant la probabilité que l'algorithme échoue. Il y a deux types d'échec :
- soit l'algorithme renvoie « pas de chemin de S vers T », alors qu'il y a un chemin de S à T ;
- soit l'algorithme renvoie un chemin qui n'est plus valide : une arête sur le chemin renvoyé a disparu pendant le processus de sondage.

Algorithme 1 : Path finding

début
  $B_S \leftarrow \{S\}$; $V_S \leftarrow \emptyset$;
  répéter
    choisir un sommet u dans $B_s \setminus V_S$;
    $N(u) \leftarrow$ `sonder` u;
    $B_S \leftarrow B_S \cup N(u)$;
    $V_S \leftarrow V_S \cup \{u\}$;
  pendant R *étapes* ;
  $B_T \leftarrow \{T\}$; $V_T \leftarrow \emptyset$;
  répéter
    choisir un sommet u dans $B_T \setminus V_T$;
    $N(u) \leftarrow$ `sonder` u;
    $B_T \leftarrow B_T \cup N(u)$;
    $V_T \leftarrow V_T \cup \{u\}$;
  pendant R *étapes* ;
  if $B_S \cap B_T \neq \emptyset$ **then**
    soit $v \in B_S \cap B_T$ et retourner $S \longrightarrow v \longrightarrow T$
  else
    retourner « pas de chemin S vers T »
fin

9. Montrer que la probablité qu'un sommet visité v de V_T n'ait pas de voisin dans B_S est au plus $(1 - \frac{c'' R \ln n}{n})^{c \ln n}$ avec forte probabilité. En déduire que la probabilité qu'il n'y ait pas d'arête entre V_T et B_S est au plus $e^{-cc'' \ln n}$ pour n assez grand. Conclure.

On admet que le diamètre de G_t est en $O(\ln n)$ avec forte probabilité, ainsi que les diamètres de B_S et B_T. (Le diamètre d'un graphe est la longueur maximum des plus courts chemins entre chaque paire de sommets)

10. Quelle est la probablité que « l'arête e est retirée à l'étape t » ? Conclure quant à la probabilité que le chemin renvoyé est invalide.

11. Conclure quant à la probabilité d'échec de l'algorithme.