Devoir maison 2

On rappelle les formules usuelles suivantes :
- pour tout $p \in [0,1]$, $(1-p) \leq e^{-p}$, et pour tout $p \in [0,1/2]$, $(1-p) \geq e^{-p-p^2}$;
- $\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}$ et $k! \geq k^k e^{-k}$.

Exercice 1 — Points isolés et graphe connexe

On se place dans le cadre des graphes aléatoires Erdös-Rényi et les notations utilisées sont celles du cours.

Pour chaque sommet, on définit la variable aléatoire :

$$I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ est un sommet isolé (sans voisin)} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose $I = \sum_{x \text{ sommet}} I(x)$ et C la variable aléatoire égale à 1 si le graphe est connexe, 0 sinon.

On dit que la propriété A (qui dépend de n) est satisfaite *avec forte probabilité* si $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A) = 1$. Le but de cet exercice est de prouver le théorème suivant :

Théorème 1. *Si $pn - \ln n \to \infty$, alors le graphe $G_{n,p}$ est connexe avec forte probabilité et si $pn - \ln n \to -\infty$, alors le graphe $G_{n,p}$ n'est pas connexe avec forte probabilité.*

On va d'abord s'intéresser aux sommets isolés.

1. Montrer que si $pn - \ln n \to +\infty$ alors $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(I \neq 0) = 0$.

On suppose maintenant que $pn - \ln n \to -\infty$.

2. Calculer $\mathbf{V}\mathrm{ar}(I)$ et montrer que $\mathbf{V}\mathrm{ar}(I) \leq \mathbf{E}[I] + \mathbf{E}[I]^2 \frac{p}{1-p}$.

3. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(I = 0) = 0$.

4. Montrer que dans ce cas, $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(C = 1) = 0$.

On s'intéresse maintenant au problème de la connexité au-dessus du seuil ($pn - \ln n \to \infty$). On s'intéresse plus précisément à la probabilité qu'il n'y ait pas de sommet isolé, alors que le graphe n'est pas connexe, $\mathbf{P}(C = 0, I = 0)$. Soit X_k le nombre total d'arbres couvrants de taille k dans les composantes de taille k.

5. Montrer que $\mathbf{P}(C = 0, I = 0) \leq \sum_{k=2}^{n/2} \mathbf{E}[X_k]$.

6. Montrer que $\mathbf{E}[X_k] \leq \binom{n}{k} p^{k-1} k^{k-2} (1-p)^{k(n-k)} \leq n(epn)^k \frac{1}{k^2} e^{-pk(n-k)}$. *Indication :* On pourra admettre que le nombre d'arbres couvrants d'un graphe connexe à k sommets est inférieur ou égal à k^{k-2}.

On s'intéresse au cas où $p = a \ln n / n$ avec $a > 1/2$, ce qui est suffisant pour le cas où $pn - \ln n \to +\infty$.

7. Montrer que pour k fixé, $\mathbf{E}[X_k] = o(1)$.

8. En utilisant que $k(n-k) \geq kn/2$, montrer que $\mathbf{E}[X_k] \leq n^{1-k/4}$ pour n suffisamment grand.

9. Conclure en montrant que $\mathbf{P}(C = 0, I = 0) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ quand $pn - \ln n \to +\infty$.

`Exercice 2` `Codage de Prüfer (exercice bonus ne comptant pas dans le barême)`

Soit K_n le graphe complet de taille n, dont les sommets sont numérotés de 1 à n, et soit T un arbre couvrant de K_n (les arbres ne sont pas enracinés, donc une feuille correspond exactement à un sommet de degrés 1). On associe à T le résultat de l'algorithme `Prüfer(T)`. Le symbole ε représente le mot (ou la liste vide), et `père`(T,v) est le père de v dans l'arbe T.

Algorithme 1 : `Prüfer`(T)

---

début
- $c \leftarrow \varepsilon$;
- **tant que** T *a plus de deux sommets* **faire**
  - Soit v la feuille de T avec le plus petit numéro;
  - $c \leftarrow c \cdot$`père`(T,v);
  - Retirer v de T ainsi que son arête incidente à v;
- `Renvoyer` c.

fin

---

1. Montrer qu'il y a une bijection entre les arbres couvrants et $\{1, \ldots, n\}^{n-2}$.

2. En déduire le nombre d'arbres couvrants de K_n, et donc une borne supérieure du nombre d'arbres couvrants dans un graphe à n sommets.