

## DEVOIR MAISON

## Exercice 1

## Inégalité de l'espérance conditionnelle

Soit  $X = \sum_{i=1}^n X_i$ , où les  $X_i$  sont des variables aléatoires à valeurs dans  $\{0, 1\}$ . On veut montrer que

$$P(X > 0) \geq \sum_{i=1}^n \frac{P(X_i = 1)}{E(X \mid X_i = 1)}.$$

Soit  $Y = 1/X$  si  $X \neq 0$  et  $Y = 0$  sinon.

1. Montrer que  $P(X > 0) = E(XY)$ .
2. Montrer que  $E(X_i Y) \geq \frac{P(X_i = 1)}{E(X \mid X_i = 1)}$ . On pourra utiliser le fait que  $1/x$  est convexe et l'inégalité de Jensen.
3. Conclure.

## Exercice 2

## Nombre de triangles d'un graphe

On note  $G_{n,p}$  l'espace probabilisé des graphes Erdős-Rényi à  $n$  sommets et de probabilité  $p$  pour chaque arête. Considérons un graphe de  $G_{n,p}$  avec  $p = 1/n$ . Soit  $X$  son nombre de triangles.

1. Montrer que  $P(X \geq 1) \leq 1/6$ .
2. Montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X \geq 1) \geq 1/7$ . *Indication* : Utiliser l'exercice précédent

## Exercice 3

## Marche aléatoire

Soit  $\{X_i\}$ ,  $i \geq 1$  une suite de variables aléatoires indépendantes et équidistribuées à valeur dans  $\{-1, 1\}$  avec  $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = 1/2$ . On considère la marche aléatoire  $\{N_n\}$  sur  $\mathbb{Z}$  définie par  $N_0 = 0$  et

$$N_{n+1} = N_n + X_{n+1}, \quad n \geq 0.$$

1. Montrer que pour tout  $a > 0$  et tout  $x > 0$ ,

$$P(N_n \geq a) \leq e^{-ax} \mathbb{E}(e^{xN_n}).$$

2. Utiliser le fait que  $\cosh x \leq e^{x^2/2}$  pour en déduire que

$$P(N_n \geq a) \leq e^{-a^2/2n}.$$

3. Poser  $a_n = c(2n \ln(n))^{1/2}$  avec  $c > 1$ . Dédurre du lemme de Borel-Cantelli que

$$P(\limsup_n N_n((2n \ln(n))^{-1/2}) < c) = 1.$$

En déduire que

$$P(\limsup_n N_n((2n \ln(n))^{-1/2}) \leq 1) = 1.$$

## Exercice 4

## Lemme local de Lovász général

Le but de cet exercice est de montrer le théorème suivant :

Soient  $E_1, \dots, E_n$  des événements dans un espace de probabilité arbitraire, et  $G = (V, E)$  le graphe de dépendance de ces événements. S'il existe des nombres  $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$  tels que pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,

$$P(E_i) \leq x_i \prod_{j: (i,j) \in E} (1 - x_j),$$

alors

$$P(\cap_{i=1}^n \bar{E}_i) \geq \prod_{i=1}^n (1 - x_i) > 0.$$

Soit  $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ . On va montrer par récurrence sur  $s$  que si  $|S| \leq s$ , alors  $P(\cap_{j \in S} \bar{E}_j) \geq \prod_{j \in S} (1 - x_j) > 0$  et pour tout  $k$ ,

$$P(E_k \mid \cap_{j \in S} \bar{E}_j) \leq x_k. \quad (\text{H})$$

1. Montrer que ceci est vrai pour  $s = 0$ .

On suppose que la propriété est vraie pour  $s$ , et on considère un ensemble  $S$  de cardinal  $s + 1$ .

2. Montrer que  $P(\cap_{j \in S} \bar{E}_j) \geq \prod_{j \in S} (1 - x_j) > 0$ .

On fixe  $k$ , on pose  $S_1 = \{j \in S \mid (k, j) \in E\}$  et  $S_2 = S - S_1$ , ainsi que  $F_1 = \cap_{j \in S_1} \bar{E}_j$ ,  $F_2 = \cap_{j \in S_2} \bar{E}_j$  et  $F = F_1 \cap F_2$ .

3. Montrer que (H) est satisfaite si  $S_2 = S$ .

4. Montrer que  $P(E_k \mid F) = \frac{P(E_k \cap F_1 \mid F_2)}{P(F_1 \mid F_2)}$ .

5. Montrer que  $P(E_k \cap F_1 \mid F_2) \leq x_k \prod_{j: (k, j) \in E} (1 - x_j)$  et que  $P(F_1 \mid F_2) \geq \prod_{j: (k, j) \in E} (1 - x_j)$ .  
En déduire que (H) est satisfaite.

6. Conclure.

7. En déduire le corollaire suivant (Lemme local de Lovász asymétrique) :

Soient  $E_1, \dots, E_n$  des événements dans un espace de probabilité arbitraire, et  $G = (V, E)$  le graphe de dépendance de ces événements. pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,  $\sum_{j: (i, j) \in E} P(E_j) \leq 1/4$ , alors  $P(\cap_{i=1}^n \bar{E}_i) > 0$ . *Indication* : prendre  $x_i = 2P(E_i)$ .

#### Exercice 5

#### Coloriage maigre

Un coloriage  $\beta$ -maigre d'un graphe est un coloriage propre (deux sommets adjacents ne peuvent avoir la même couleur), où pour chaque sommet  $v$ , dans le voisinage de  $v$ , au plus  $\beta$  sommets ont la même couleur.

Le but de l'exercice est de montrer que si  $\Delta$ , le degré maximum d'un graphe  $G$ , satisfait  $\Delta \geq \beta^\beta$ , alors  $G$  a un coloriage  $\beta$ -maigre utilisant au plus  $16\Delta^{1+1/\beta}$  couleurs.

1. Montrer le résultat pour  $\beta = 1$ . *Indication* : pas de probabilités dans cette question

On suppose maintenant que  $\beta \geq 2$ . On pose  $C = 16\Delta^{1+1/\beta}$ . Pour chaque arête  $(u, v)$ , on pose  $A_{u,v}$  l'événement «  $u$  et  $v$  ont la même couleur » et pour chaque  $\beta + 1$  uplets  $v_1, \dots, v_{\beta+1}$  de voisins d'un même sommet,  $B_{v_1, \dots, v_{\beta+1}}$  l'événement «  $v_1, \dots, v_{\beta+1}$  ont la même couleur ».

2. Calculer la probabilité des événements de type  $A$  et  $B$ , lorsque le coloriage est effectué de manière uniforme et indépendante pour chaque sommet, sur  $C$  couleurs.
3. De combien d'événements de type  $A$  (resp. de type  $B$ ) dépendent les événements de type  $A$  (resp. de type  $B$ ) ?
4. Conclure en appliquant la version asymétrique du lemme local de Lovász.