Devoir maison 2

Les notations qui ne sont pas rappelées sont celles du cours. Vous êtes autorisés à réfléchir à plusieurs sur les exercies (pas plus de deux ou trois). Cependant, la rédaction doit être individuelle et chacun doit rendre une copie. Précisez les noms de vos collaborateurs.

`Exercice 1` `Processus de branchement temporel`

On considère le processus de branchement suivant :
- à la date 0, $Z_0 = 1$ (la racine du processus). Par convention, on dit que ce nœud naît à la date 0 ;
- quand le nœud i naît, sa durée de vie a une distribution géométrique de paramètre μ, c'est-à-dire que s'il naît à la date t, alors il meurt à la date $t + U_i$, où $U_i \sim \mathcal{G}\text{eo}(\mu)$.
- un nœud vivant i peut donner naissance à ses fils. Ces fils sont générés de la manière suivante : si le nœud i naît à la date t, son premier fils (si i ne meurt pas avant) naît à la date $t + V_i^{(1)}$, son second fils à la date $t + V_i^{(1)} + V_i^{(2)}$, etc. où $V_i^{(j)} \sim \mathcal{G}\text{eo}(\lambda)$.
- toutes les durées de vie (U_i) et les intervalles entre les naissances $(V_i^{(j)})$ forment une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

1. Quelle est la loi du nombre de fils d'un nœud ? *Indication :* On pourra d'abord s'intéresser à la probabilité que $U_i \geq V_i^{(1)}$ puis utiliser le caractère sans mémoire des variables géométriques.

2. Quelle est la probabilité d'extinction de ce processus ?

`Exercice 2` `Triangles et transitivité dans les graphes aléatoires`

Le coefficient de transitivité dans un graphe est le rapport entre le nombre de triangles et le nombre de chemins de longueur 2 dans le graphe : soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté avec n sommets et $T_1, \dots, T_M$ avec $M = \frac{n!}{n-3!}$ une énumeration des triplets ordonnés de sommets, le coefficient de transitivité de G est

$$C(G) = \frac{\sum_{j=1}^{M} \mathbf{1}_{T_j \text{ est un triangle}}}{\sum_{j=1}^{M} \mathbf{1}_{T_j \text{ est un chemin de longueur 2}}}.$$

Quand G est un graphe aléatoire, la tranvitivité moyenne de ce graphe aléatoire est défini par :

$$EC(G) = \frac{\mathbf{E}[\sum_{j=1}^{M} \mathbf{1}_{T_j \text{ est un triangle}}]}{\mathbf{E}[\sum_{j=1}^{M} \mathbf{1}_{T_j \text{ est un chemin de longueur 2}}]}.$$

Notons que parce que les triplets sont ordonnés, chaque triangle est compté 6 fois et chaque chemin de longueur 2 est compté deux fois.

1. Pour tout $n \geq 3$, donner deux exemples de graphe connexe avec n sommets, l'un avec un coefficient de transitivité 0 et l'autre de coefficient de transitivité 1.

Triangles et transitivité dans un graphe Erdös-Rényi

2. Quelle est la fonction de seuil pour l'existence de triangles dans un graphe Erdös-Rényi ? (donner la preuve).

3. Si $G_{n,p} \sim \mathcal{G}(n, p)$, avec p fixé, quel est $EC(G_{n,p})$? Si $p = p(n)$ tel que la limite de $p(n)$ existe, donner une condition nécessaire et suffisante sur $p(n)$ pour que $\lim_{n\to\infty} EC(G_{n,p}) > 0$. Est-ce réaliste par exemple dans un réseau tel que Facebook, où les arêtes sont les relations d'« amitié » ?

Triangles et transitivité dans les graphes à clés
On définit une nouvelle classe de graphes aléatoire : les **graphes à clés**. Un graphe à clés est une graphe avec n sommets construit de la manière suivante :

- soit un ensemble de N clés et un entier positif $K \leq N$;
- pour chaque sommet i, on associe aléatoirement un ensemble de K clés noté $K(i)$. Chaque $K(i)$ est choisi uniformément, c'est-à-dire, si S est un ensemble de K clés, alors $\mathbf{P}(K(i) = S) = \binom{N}{K}^{-1}$, et les $(K(i))$ forment une famille mutuellement indépendante ;
- il y a une arête entre les sommets i et j si et seulement si $K(i) \cap K(j) \neq \emptyset$.

4. Si $K = 1$, quelle est la structure du graphe ? quel est sa transitivité moyenne ?

On ne suppose plus $K = 1$.

5. Soient deux sommets i and j, quelle est la probabilité p que (i, j) soit une arête ?

6. Soient quatre sommets i, j, k, ℓ avec $i \neq j$ et $k \neq \ell$, montrer que les événements "(i, j) est une arête" et "(k, ℓ) est une arête" sont indépendants sauf si $\{i, j\} = \{k, \ell\}$.

7. Expliquer la différence des graphes à clés avec les graphes Erdös-Rényi.

8. Soit T_i un triplet de sommets, quelle est la probabilité que ce triplet soit un triangle ? *Indication :* on calculera d'abord la probabilité qu'il n'y a pas d'arête dans T_i. On appelle β cette probabilité. Montrer que $\beta \geq p^3$.

On fait maintenant varier K et N avec le nombre de sommets. On écrit donc K_n au lieu de K, etc. pour indiquer cette dépendance. On admet que $p_n \sim \frac{K_n^2}{N_n}$ et que $\beta_n \sim \tau_n = \frac{K_n^3}{N_n^2} + \left(\frac{K_n^2}{N_n}\right)^3$ et on suppose que les limites de ces quantités existent quand $n \to \infty$.

9. Quelle est la limite de la transitivité moyenne quand $K_n^2 = o(N_n)$?

10. Montrer que si $\lim_{n\to\infty} n^3\tau_n = 0$, alors avec forte probabilité il n'y a aucun triangle dans le graphe.

11. Montrer que si $\lim_{n\to\infty} p_n = \alpha > 0$, alors avec forte probabilité il y a au moins un triangle dans le graphe.

On suppose que $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$ et que $\lim_{n\to\infty} n^3\tau_n = \infty$.

12. Donner une borne supérieure sur la probabilité qu'il n'y ait aucun triangle dans le graphe. (Donner une expression où $\mathbf{E}[1_{T_i,T_j \text{ sont des triangles}}]$ apparaît pour des triplets partageant deux sommets sans essayer de simplifier cette expression). Montrer que $\mathbf{E}[1_{T_i,T_j \text{ sont des triangles}}] = o(n^2\beta_n^2)$ est une condition suffisante pour l'existence avec forte probabilité d'un triangle dans un graphe.