~~VITESSE~~ DE CONVERGENCE DE CHAÎNES DE MARKOV

GSL
07 02
2014

1/10

Rappel : $\lim_{t\to\infty} \|A^t - \mathbb{1}_n^t\|^{1/t} \Rightarrow \rho_2(A)$

"taux de convergence"

→ $\max\{|\lambda| : \lambda$ valeur propre de A et $\lambda \neq 1\}$

→ $\rho_2(A) < 1$ si A est irréductible et apériodique

Ex 1 : lazy random walk on graphs

$G = ([n], E)$ graphe connexe.

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1/2 \cdot d_i & \text{si } (i,j) \in E \\ 1/2 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

d_i — degrée de i

irréductible ✓ (connexe) apériodique ✓ (auto-boucles) distribution stationnaire ? :

$$\boxed{\pi_i = \frac{d_i}{2|E|}}$$

$$\rightsquigarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \pi_i A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{2|E|} A_{ij}$$

$$= \sum_{i:\{i,j\}\in E} \frac{\cancel{d_i}}{2|E|} \frac{1}{2\cancel{d_i}} + \frac{d_i}{2|E|} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{d_i}{4|E|} + \frac{d_j}{4|E|} = \frac{d_j}{2|E|} = \pi_j \quad ✓$$

---

réversible :

Cas 1 : $\{i,j\}\in E$: $\pi_i A_{ij} = \frac{\cancel{d_i}}{2|E|} \cdot \frac{1}{2\cancel{d_i}} = \frac{1}{4|E|}$ ✓

Cas 2 : $i = j$: $\cancel{\pi_i A_{ij}} = \frac{1}{4|E|}$ ✓

---

donc : $\langle Ax, y\rangle_\pi = \langle x, Ay\rangle_\pi$ pour tout x, y

où $\langle x, y\rangle_\pi = \sum_{i=1}^{n} \pi_i x_i y_i$

$\Rightarrow$ A diagonalisable $\Rightarrow$ toutes les v.p. sont réelles

07 02 2014

$\Rightarrow \overset{\lambda_1}{1} > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n > -1$

$\rho_2 = \max\{|\lambda_2|, |\lambda_n|\}$

2/10

$\boxed{|\lambda_n|}$:

$$B = \frac{A - \frac{1}{2}I}{1 - \frac{1}{2}} = 2A - I$$

est stochastique (et ~~réversible~~)

avec valeurs propres :

$$\boxed{\mu_i = 2\lambda_i - 1}$$

$\Rightarrow -1 \leq \mu_i \leq 1$ pour tout i

$\Rightarrow -1 \leq \underbrace{2\lambda_n - 1}_{= \mu_n} \Rightarrow \lambda_n \geq 0$

$\Rightarrow$ ~~max~~ $\rho_2 = \max\{|\lambda_2|, |\lambda_n|\} =$

$= \max\{\lambda_2, \lambda_n\} = \lambda_2$

$\boxed{\lambda_2}$: Soit $Az = \lambda_2 z$ avec $\|z\|_\pi = 1$

(et $\langle z, \mathbb{1} \rangle_\pi = 0$)

Lem: $1 - \lambda_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \pi_i A_{ij} (z_i - z_j)^2$

si A est reversible (sinon, partie réelle, ...)

Dém:

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j} \pi_i A_{ij} (z_i - z_j)^2 =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,j} \pi_i A_{ij} z_i^2}_{} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,j} \pi_i A_{ij} z_j^2}_{} -$$

$$- \sum_{i,j} \pi_i A_{ij} z_i z_j$$

$$= \sum_{i,j} \pi_i A_{ij} z_i^2 - \sum_{i,j} \pi_i A_{ij} z_i z_j$$

$$= \underbrace{\sum_{i} \pi_i z_i^2}_{= \|z\|_\pi^2 = 1} - \sum_i \pi_i z_i \underbrace{\sum_j A_{ij} z_j}_{= (Az)_i}$$

$$= 1 - \langle z, Az \rangle_\pi = 1 - \lambda_2 \overbrace{\langle z, z \rangle_\pi}^{= 1} = 1 - \lambda_2$$

Dans notre cas :

cédric 07 02 2014 / 3710

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{4|E|} & \text{si } \{i,j\} \in E \text{ ou } i \neq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \frac{1}{2} \sum_{i,j} \pi_i A_{ij} (z_i - z_j)^2$$

$$\cancel{= \frac{1}{\ldots} \sum_{\{i,j\} \in E} \ldots A_{ij}}$$

$$= \frac{1}{8|E|} \sum_{\{i,j\} \in E} (z_i - z_j)^2$$

une ~~direction~~ : $\cancel{\leq \frac{1}{8|E|} 2 \|z\|_\pi^2 = \frac{1}{4|E|}}$

autre direction :

$\rightarrow$ il existe un $|z_i| \geq 1$

$\rightsquigarrow$ sinon $1 = \|z\|_\pi^2 = \sum_{i=1}^{n} \pi_i \underbrace{|z_i|^2}_{<1} < 1$ (y)

$\rightarrow$ il existe $z_j \leq 0 \leq z_i$

$\rightsquigarrow$ sinon $\langle z, \mathbb{1} \rangle_\pi = \sum_{i=1}^{n} \pi_i z_i \neq 0$ (y) (y)

$\Rightarrow$ δl exste $\quad |z_a - z_b| \geq 1$

$\Rightarrow (z_a - z_b)^2 \geq 1$

$$\rightsquigarrow \sum_{\{i,j\}\in E} (z_i - z_j)^2 \geq$$

$$\geq \sum_{\{i,j\}\in P_{a\to b}} (z_i - z_j)^2$$

$$\underset{[CS]}{\geq} \frac{1}{\ell(P)} \Big(\sum_{\{i,j\}\in P_{ab}} (z_i - z_j) \Big)^2$$

$$= \frac{1}{\ell(P)} (z_a - z_b)^2 \geq \frac{1}{\ell(P)} \geq \underline{\underline{\frac{1}{\mathrm{diam}}}}$$

$$\rightsquigarrow 1 - \lambda_2 \geq \frac{1}{8\cdot|E|\cdot\mathrm{diam}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8|E|\cdot\mathrm{diam}} \leq 1-\lambda_2$$

(n^{-3})

$\Rightarrow \quad 1-\lambda_2 = \Omega\left(\frac{1}{(n^2 \text{diam})}\right) = \Omega(n^{-3})$

Gdl 02 02 2014 (4/10

$\cancel{1-\lambda_2 = O(n^{-1})}$

et $\boxed{1-\lambda_2 = \Omega(n^{-3})}$

$\Rightarrow \quad \|A^t - \pi \cdot 1\| = d(t) \leq \frac{1}{4}$

$t_{mix} = \min\{t \mid d(t) \leq \frac{1}{4}\}$

Thm : Si A est ergodic, reversible, alors

$$\frac{\rho_2}{1-\rho_2} \cdot \log 2 \leq t_{mix} \leq \frac{1}{1-\rho_2} \cdot \log\left(\frac{4}{\pi_{min}}\right)$$

$\Rightarrow \quad t_{mix}(A) = O(n^3 \cdot \log n)$ ~~(en réalité n^3)~~ $\checkmark$

ρ_d ≈ (presque ≈) régulier : $O(n^3)$

Ex2 :

$$\rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \rho_2 = 1-\varepsilon$$

mais : $\alpha = \min\{A_{ij} > 0\}$ très petit

$$\underbrace{\pi_i}_{\geq \pi_{min}} \underbrace{A_{ij}}_{\geq \alpha \, \geq \Omega(\frac{1}{n})}$$

$$\geq \Omega\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

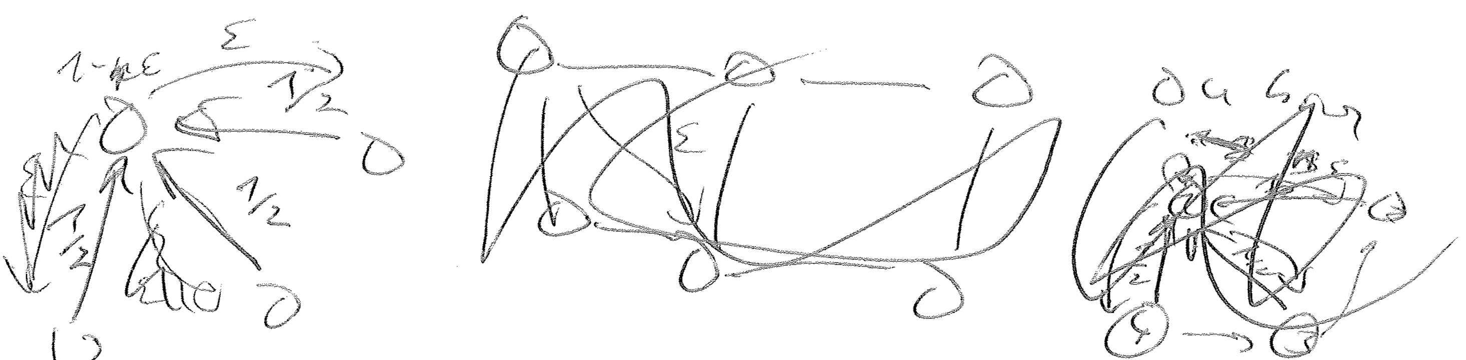
Ex 3 :

GSIL
0702
2016
8/10

(ajouter un arc
(de poids ε quelque part)

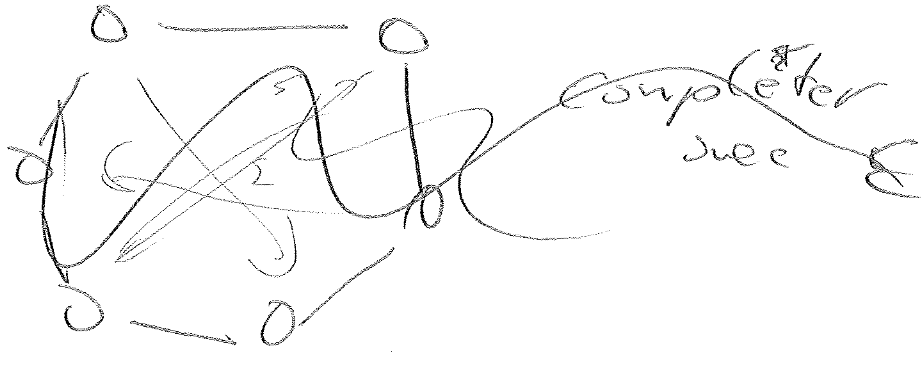
~~dans une matrice de~~

~~(s≥y [illegible] wolf~~

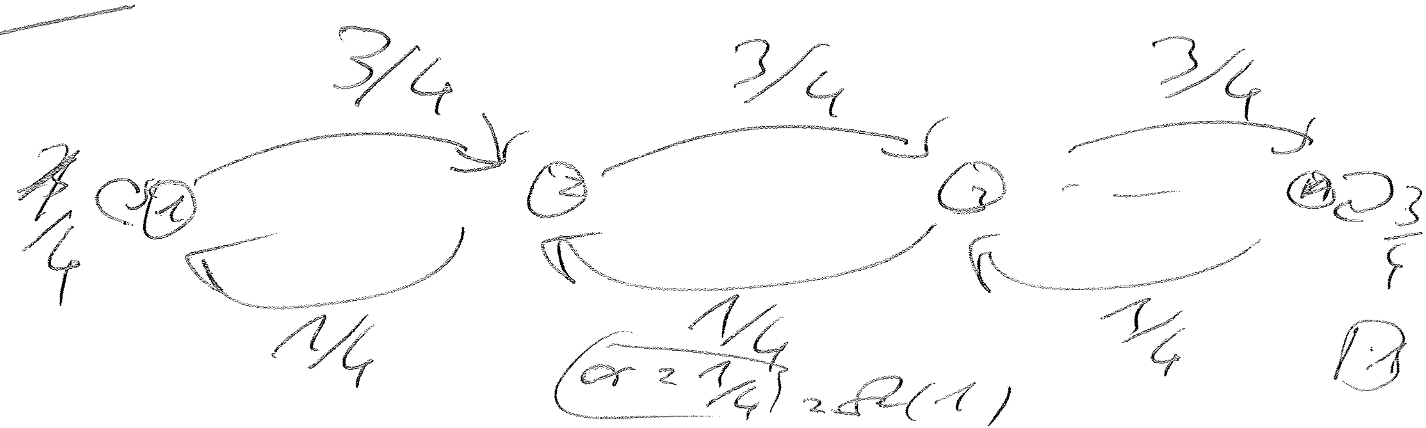


$\leadsto \rho_2 \leq 1 - \frac{1}{2}$

$= 1/2$



Ex 4 : naissance-mort



~~Suite~~

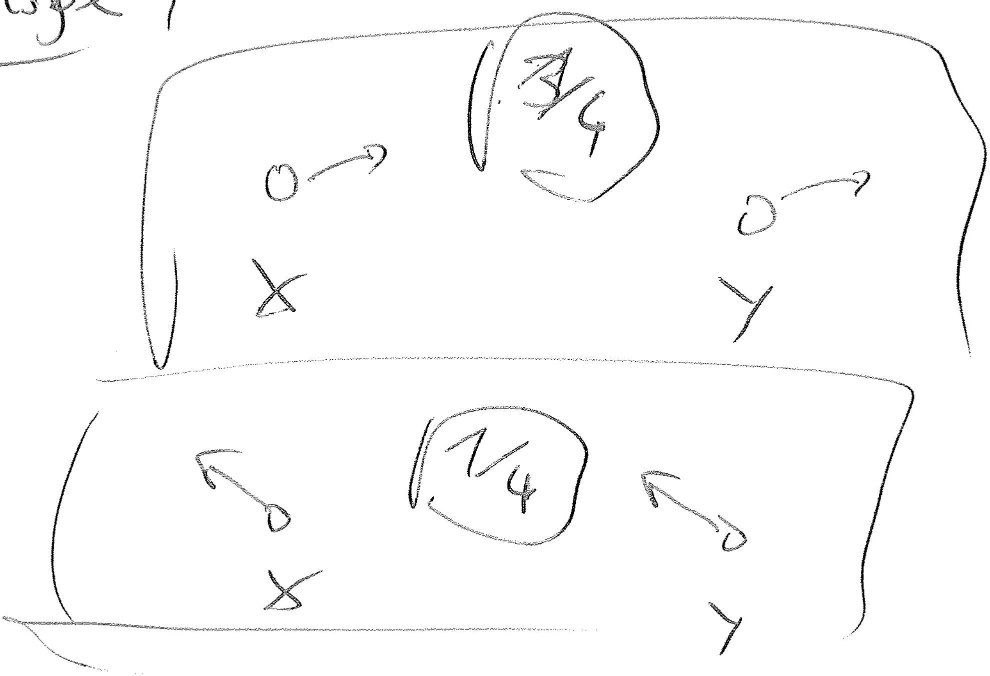
Distribution stationnaire :

$$\boxed{\pi_i = \frac{2\cdot 3^{i-1}}{3^n - 1}}$$

$$\pi_{min} = \pi_1 = \Theta\left(\frac{1}{3^n}\right)$$

$a = \Theta(1)$

Couplage :



Thm (Anne) : $t_{mix} \le 4 \cdot t_{couplage}$

$$t_{\text{couplage}} \leq \max_i \mathbb{E}_i \tau_n$$

Cosh
07 02
2014
(6/10)

$$\leq \mathbb{E}_1 \tau_n$$

$$\mathbb{E}_1 \tau_n = \sum_{k=1}^{n-1} \overbrace{\mathbb{E}_k \tau_{k+1}}^{a_k}$$

$$a_k = \mathbb{E}_k \tau_{k+1} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \mathbb{E}_{k-1} \tau_{k+1} =$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \left(\mathbb{E}_{k-1} \tau_k + \mathbb{E}_k \tau_{k+1} \right)$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} a_{k-1} + \frac{1}{4} a_k$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{4} a_k = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} a_{k-1}$$

$$\Rightarrow \quad a_k = 1 + \frac{1}{3} a_{k-1}$$

et $a_1 = \cancel{3/4}\ 4/3$

(1/2)

$\Rightarrow$ $a_k = \frac{3}{2} - \cancel{\frac{3}{4} \cdot 3^k - \frac{1}{4}}$ $\frac{3^{k}}{2 \cdot 3^{k}}$

$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = (3 - 3^{-k})/2$

$\frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^k}$

$\Rightarrow$ $t_{couplage} \leq \mathbb{E}_1 \tau_n =$

$= \sum_{k=1}^{n-1} a_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{3}{2}}_{O(n)} - \underbrace{\frac{1}{6} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{3^{k-1}}}_{= O(1)}$

$= O(n)$

$\Rightarrow$ $\boxed{t_{mix} = O(n)}$

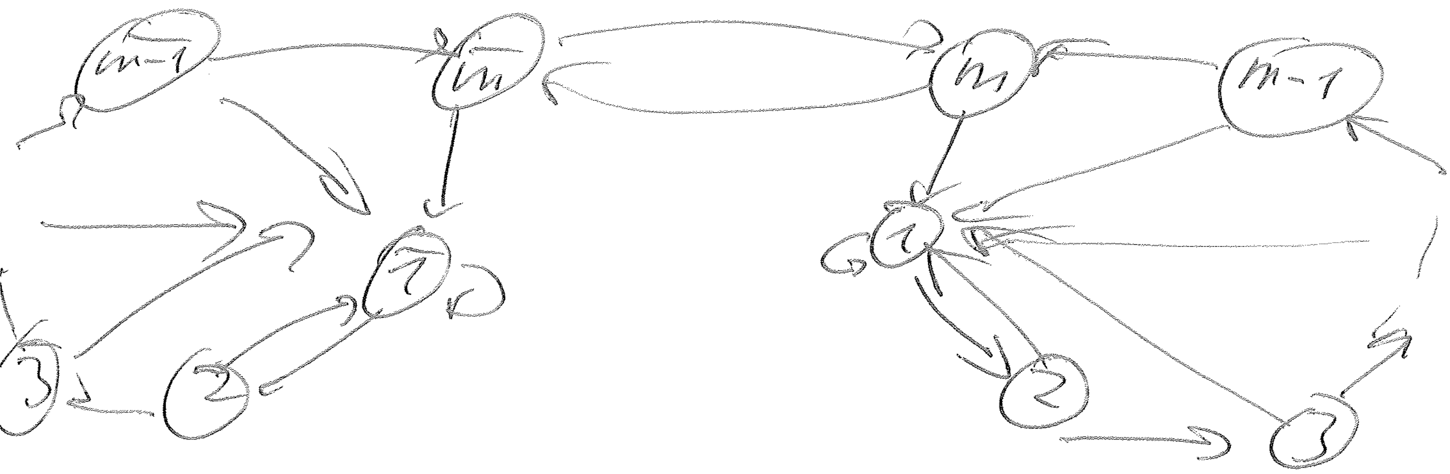
$\Rightarrow$ $\boxed{\rho_2 = \Omega(n^{-1})}$ même $\Theta(1)$?

Ex 5 : Chump : exemple, mais un trou dans le preuve

Goël 02 02 2014

7/10

→ random walk ~~on~~ dans un digraphe



2-régulier, $A_{ij} \in \{0, \frac{1}{2}\}$

$$\pi_i = \frac{1}{2^{i+1}} \quad \text{si} \quad i < m$$

$$\pi_m = \frac{1}{2^m}$$

Bottleneck ratio :

$$\Phi_S(A) = \frac{\sum_{i \in S} \sum_{j \notin S} \pi_i A_{ij}}{\pi(S)}$$

(2)

$$\Phi(A) = \min_{\pi(S) \leq \frac{1}{2}} \frac{1}{\pi(S)} \phi_S(A)$$

pour notre exemple,

$$\pi(\{1, \dots, m\}) = \pi(\{\bar{1}, \dots, \bar{m}\}) = \frac{1}{2}$$

et

$$\phi_S(A) = \cancel{2} \cdot \pi_m \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{1}{2^m}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi(A) \leq \frac{1}{2^m}}$$

Thm : $$\boxed{t_{mix}(A) \geq \frac{1}{4\Phi(A)}}$$

si A est ergodique

Dém : Soit $\Phi(A) = \phi_S(A)$

avec $\pi(S) \leq \frac{1}{2}$

Posons $z_j = \begin{cases} \pi_j / \pi(S) & \text{si } j \in S \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

((est

$$\| z \cdot A - z \|_{TV} =$$

$$\cancel{= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \Big| \sum_{i \in 1}^{n}}$$

$$\| z - \pi \|_{TV} = \frac{1}{2} \sum_{j \notin S} \pi_j + \frac{1}{2} \sum_{j \in S} \pi_j \left(\frac{1}{\pi(S)} - 1 \right) \geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \pi_j = \frac{1}{2}$$

GdL
07 02
2014

8/10

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{i \in S} \frac{\pi_i A_{ij}}{\pi(S)} - \frac{\pi_j [j \in S]}{\pi(S)} \right|$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{j \notin S} \sum_{i \in S} \frac{\pi_i A_{ij}}{\pi(S)}}_{< \Phi(A)} + \frac{1}{2} \sum_{j \in S} \left| \frac{\pi_j}{\pi(S)} - \sum_{i \in S} \frac{\pi_i A_{ij}}{\pi(S)} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \Phi(A) + \frac{1}{2} \sum_{j \in S} \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi_i A_{ij}}{\pi(S)} - \sum_{i \in S} \frac{\pi_i A_{ij}}{\pi(S)} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \Phi(A) + \frac{1}{2} \Phi(A) = \Phi(A) \ \boxed{\text{h}}$$

$$\cancel{\sum_{i \in S} \sum_{j \notin S} \pi_i A_{ij}} = \sum_{i \in S} \left(\sum_{j} \pi_i A_{ij} = (\pi_i =) \sum_{k} \pi_k A_{ki} \right.$$

$$\Rightarrow \quad \|zA^{t+1} - zA^{t}\|_{TV} \le \Phi(A)$$

$$\Rightarrow \quad \|zA^{t} - z\|_{TV} \le t \cdot \Phi(A)$$

$$\cancel{\Rightarrow \quad \|zA^{t} - \pi\|_{TV} \le \; \le \|z}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \le \|z - \pi\|_{TV} \le \|zA^{t} - z\|_{TV} + \|zA^{t} - \pi\|_{TV}$$

$$\le t \cdot \Phi(A) + \|zA^{t} - \pi\|_{TV}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \le t_{mix} \cdot \Phi(A) + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\cancel{t_{mix} \ge \frac{\Phi(A)}{4}}} \quad \boxed{t_{mix} \ge \frac{1}{4\Phi(A)}}$$

Pour notre exemple !

Lu 02 02 2016 (9/10)

$$\Rightarrow t_{mix} \geq \frac{1}{4\cdot 2^{-m}} = 2^{m-2}$$

$$\Rightarrow 1-\beta_2 = \Omega(2^{-m})$$

retour à l'Ex 4 !

$$\pi_n = \frac{2\cdot 3^{n-1}}{3^n-1} = \frac{2}{3}\underbrace{\frac{3^{n-1}}{3^{n-1}-1/3}}_{\geq 1}$$

$$\geq 2/3$$

$$\Rightarrow \pi(S) \leq 1/2 \Leftrightarrow n \notin S$$

$$\Phi_S(A) = \frac{\sum_{i \in S} \pi_i \left(\frac{1}{4}[i-1 \notin S] + \frac{3}{4}[i+1 \notin S] \right)}{\pi(S)}$$

→ devient plus petit

si S n'a pas de trous.

aussi, $1 \in S$ [pose $S' = \{1, \dots, \max S\}$]

$$\leadsto \boxed{S = \{1, \dots, k\}}$$

$$\Phi_S(A) = \frac{\frac{2 \cdot 3^{k-1}}{3^{n}-1} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{3^{k}-1}{3^{n}-1}}$$

$$= \frac{3}{4} \frac{2 \cdot 3^{k-1}}{3^k - 1} = \frac{1}{2} \frac{3^k}{3^k - 1} \geq \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \Phi(A) \geq \frac{1}{2}$

4 AL
07-02
2014
10 / 10

$\Rightarrow$

$\cancel{[\text{reversible}]}$ $\cancel{\frac{\Phi(A)^2}{2}} \leq \cancel{\frac{1}{8}}$

Thm : A reversible :

$$\boxed{\frac{\Phi(A)^2}{2} \leq 1 - \lambda_2 \leq 2 \cdot \Phi(A)}$$

$$\Rightarrow \boxed{1 - \rho_2(A) \geq \frac{1}{8}}$$

$\rightsquigarrow$ Thm d'avant

$$t_{max} = O\left(\frac{1}{1-\rho_2} \cdot \log \frac{1}{\pi_{min}}\right)$$

$$= O(n)$$