Ergodicité faible dans les CM non homogènes [HAJNAL, 1957].

I Notations, définitions

Chaîne de Markov à N états

$P_1,\dots,P_j,\dots$ matrices de transition [matrices stochastiques]

$H_{i,m} = \prod_{j=i+1}^{i+m} P_j$ et $H_m = H_{0,m} = \prod_{j=1}^{m} P_j$ $\quad H_{im} = (h^{(i,m)}_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta\le N}$ stochastiques

Déf: chaîne (faiblement) ergodique si $\forall \alpha,\alpha',\beta$ états $\forall i \in \mathbb{N}$ $|h^{(i,n)}_{\alpha\beta} - h^{(i,n)}_{\alpha'\beta}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

chaîne (fortement) ergodique si $\exists \lambda^i_\beta$ $\forall \alpha$ $h^{(i,n)}_{\alpha\beta} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda^i_\beta$

Rq [$\forall i$] déf précédente : $H_{0,m} \xrightarrow{n\to\infty} A$ stochastique de rang 1.
$\Rightarrow$ ergodique si $\exists j$, P_j de rang 1 par exemple.
Ici on veut une propriété d'oubli du passé lointain, et pas seult des conditions initiales.

II Une classe spéciale de matrices: les matrices brouillantes

On veut définir un équivalent des matrices ergodiques/régulières (= irréductibles, apériodiques)

Rq: $\begin{pmatrix} x & x & \\ x & x & \\ & & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & & \\ & x & x \\ & x & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ & x & x \end{pmatrix}$ red × red = irred

$\begin{pmatrix} & x & \\ & & x \\ x & x & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & x & x \\ x & & \\ x & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & & \\ x & & \\ x & x & x \end{pmatrix}$ irred × irred = red

Propriétés souhaitées:
(i) Si $A \in \mathcal{C} \Rightarrow AB, BA \in \mathcal{C}$
(ii) $A_1,\dots,A_n \in \mathcal{C} \Rightarrow A_1 \dots A_n \dots$ ergodique.

Candidats: - matrices sans coefficients nuls
- matrices avec au-une colonne sans coefficients nul

Matrices brouillantes P telle que (régulière ?) et
$\forall$ lignes α,β $\exists$ une colonne γ tq $p_{\alpha\gamma}>0$ et $p_{\beta\gamma}>0$

Intuition: supposons qu'à l'étape n le système soit dans l'état γ. Alors on ne peut être sûr de la provenance: α ou β.

Mesure de brouillage: $\{P\} = \min_{\alpha,\alpha'} \sum_\beta \min(p_{\alpha\beta}, p_{\alpha'\beta})$

Prop: (i) $\{P\} \in [0,1]$
(ii) $\{P\} = 0 \iff P$ n'est pas brouillante
(iii) $\{P\} = 1 \iff P$ stochastique de rang 1 (ttes lignes identiques).

Lemme 1: Si L, M sont des matrices stochastiques, alors $\{LM\} \ge \{L\}$.

Dém: • $\{L\} = 0 \Rightarrow \{LM\} \ge 0$.
• Supposons $\{L\} > 0$, et deux lignes 1 et 2. Posons $Q = LM$.
Si $\sum_\beta \min(q_{1\beta}, q_{2\beta}) < \sum_\beta \min(q_{\alpha\beta}, q_{\alpha'\beta})$ $\forall \alpha, \alpha'$.

Alors $q_{\alpha\gamma} = \sum_\beta l_{\alpha\beta} m_{\beta\gamma}$

et $\min(q_{1\gamma}, q_{2\gamma}) \ge \min\left(\sum_\beta l_{1\beta} m_{\beta\gamma}, \sum_\beta l_{2\beta} m_{\beta\gamma}\right)$

$\ge \sum_\beta m_{\beta\gamma} \min(l_{1\beta}, l_{2\beta})$

Donc $\{Q\} = \sum_\gamma \min(q_{1\gamma}, q_{2\gamma}) \ge \sum_{\gamma\beta} m_{\beta\gamma} \min(l_{1\beta}, l_{2\beta}) = \sum_\beta \min(l_{1\beta}, l_{2\beta}) \ge \{L\}$

Lemme 2 : Si L et M sont des matrices stochastiques, et l'une d'elles est brouillante alors $Q = LM$ l'est.

Dém : Si L est brouillante, c'est le lemme 1.
Si M est brouillante, considérons par exemple les lignes 1 et 2 de Q.
$\exists \alpha_1\ l_{1\alpha_1} > 0$; $\exists \alpha_2\ l_{2\alpha_2} > 0$ $\exists \gamma\ m_{\alpha_1\gamma} > 0$ et $m_{\alpha_2\gamma} > 0 \Rightarrow q_{1\gamma} > 0$ et $q_{2\gamma} > 0$.

Théorème 1 : Soit X une matrice stochastique. $\exists Y$ stochastique tq $Z = XY$ pas régulière ssi X n'est pas brouillante.

Dém : FAUX. sauf si régulière : apériodique + seule classe terminale.

III Condition pour ergodicité faible

Ecart maximum de A : $[A] = \max_\beta \max_{\alpha\alpha'} |a_{\alpha\beta} - a_{\alpha'\beta}|$

$[A] = 0$ ssi matrice de rang 1 stochastique $[A] = 0 \iff \{A\} = 1$.

Lemme 3 : Si $F = PG$ avec P et G stochastiques, alors $[F] \leq (1 - \{P\})[G]$

Dém : $f_1 f_2 \ldots$ les elt d'une colonne de F, $g_1 g_2 \ldots$ la m colonne de G.

$f_1 - f_2 = \sum_\beta p_{1\beta} g_\beta - \sum_\beta p_{2\beta} g_\beta = \sum_\beta (p_{1\beta} - p_{2\beta}) g_\beta$. $g_{min} = \min_\beta g_\beta$, $g_{max} = \max_\beta g_\beta$.

On suppose les états ordonnés de manière que $\forall \beta \leq \omega\ p_{1\beta} \geq p_{2\beta}$ et $\forall \beta > \omega\ p_{1\beta} < p_{2\beta}$.
On a bien sûr $\sum_{\beta=1}^N p_{1\beta} - p_{2\beta} = 0$ donc $\sum_{\beta=1}^{\omega} p_{1\beta} - p_{2\beta} = -\sum_{\beta=\omega+1}^N p_{1\beta} - p_{2\beta}$

$$|f_1 - f_2| \leq (g_{max} - g_{min}) \sum_{\beta=1}^{\omega} (p_{1\beta} - p_{2\beta}) = (g_{max} - g_{min})\left(1 - \sum_{\beta=1}^{\omega} p_{2\omega} - \sum_{\beta=\omega+1}^{N} p_{1\omega}\right)$$

$$\leq (g_{max} - g_{min})\left(1 - \sum_{\beta=1}^{\omega} \min(p_{1\beta}, p_{2\beta})\right) \leq (g_{max} - g_{min})\underbrace{\left(1 - \min \sum \min(\ldots)\right)}_{(1 - \{P\})}$$

$[F] \leq [G](1 - \{P\})$

Cor : $[A] \leq (1 - \{A\})$ [P = Identité].

Fait : • $N[P] \geq (1 - \{P\})$

$$N \max_\beta |p_{1\beta} - p_{2\beta}| \geq \sum_\beta |p_{1\beta} - p_{2\beta}| = \sum_\beta \max(p_{1\beta}, p_{2\beta}) - \sum_\beta \min(p_{1\beta}, p_{2\beta})$$

$$\geq 1 - \sum_\beta \min(p_{1\beta}, p_{2\beta}).$$

• $[P_1 P_2] \geq (1 - \{P_1\})[P_2] \geq (1 - \{P_1\})(1 - \{P_2\})$

Théorème 2 : $\forall$ Markov chaîne, $[H_n] \leq \prod_{j=1}^{n-1}(1 - \{P_j\})[P_n] \leq \prod_{j=1}^{n}(1 - \{P_j\})$.

On peut retrouver le résultat des chaînes homogènes : $(P_{\alpha\beta}^{(n)} - L_\alpha) \leq (1 - \{P\})^n$.
[ou prendre une puissance].

Théorème 3 : Une CM est ergodique ssi il existe une subdivision des H en blocs numérotés $i_1 i_2 \ldots$ telle que $\sum_{j=1}^{\infty} \{H_{i_j n_j}\}$ diverge, avec $n_j = i_{j+1} - i_j$

Dém : $\Leftarrow$ $\sum_j \{H_{i_j, n_j}\}$ diverge ssi $\prod_{j=1}^{\infty}(1 - \{H_{i_j n_j}\}) \longrightarrow 0$

$\Rightarrow$ $\{H_{i,n}\} \to 1\ \forall$ si la chaîne est ergodique.
Soit $\delta > 0$ petit. $\forall i \exists n\ \{H_{i,n}\} \geq \delta$.

Cor : une CM pour laquelle $\sum \{P_j\}$ diverge est ergodique. (On prend la subdivision la plus fine)

Théorème 4 : Soient (X'_n), (X^2_n) deux copies ~~de~~ indépendantes de la même chaîne (X_n) (3)
Alors (X_n) ergodique $\Leftrightarrow$ $\forall i$ $P(\exists m \geq i \; X'_n = X_n^2 \mid X'_i \neq X^2_i) = 1$.

Dém : Supposons $X'_i = 1, X^2_i = 2$. $P(X'_{i+1} = X^2_{i+1} \mid X'_i = 1, X^2_i = 2) = \sum_{\beta=1}^{m} p_{1\beta} p_{2\beta} \geq \sum_\beta \min(p_{1\beta}, p_{2\beta})^2$
si $P_i = P$.
$$\geq \frac{1}{N}\left(\sum_\beta \min(p_{1\beta}, p_{2\beta})\right)^2 \geq \frac{1}{N}\{P\}^2$$

$\Rightarrow$ Si (X_n) ergodique et $X'_0 = X^2_0$, alors on peut trouver $i_1, i_2 \ldots$ $|\{H_{i_j, n_j}\}| > \delta > 0$.
($\sum$ diverge et $\frac{1}{n}\{H_{i_j n_j}\}$ aussi)
Donc $\underbrace{\prod_{j=1}^{m} (1 - \frac{1}{N}\{H_{i_j, n_j}\}^2)}_{\geq P(P(X'_n \neq X^2_n \, \forall n \mid X'_i \neq X^2_i)} \to 0$.

$\Leftarrow$ $r = 0$, supposons $X''^1_0 \neq X''^2_0$.
$h^{(0,j)}_{\alpha\beta} = h^{(0,j)}_{\alpha \to \beta} + h^{(0,j)}_{\alpha \times \beta}$ avec $h^{(0,j)}_{\alpha \to \beta} = P(X'_i \neq X^2_i \; \forall i \in [0,j], X'_j = \beta \mid X'_0 = \alpha)$ αx^2_0

Par hypothèse $\sum_\beta h^{(0,j)}_{\alpha \to \beta} \xrightarrow{j \to \infty} 0$ et $\sum_\beta h^{(0,j)}_{\alpha \to \beta} \to 1$. Comme $h^{(0,j)}_{\alpha \to \beta} \geq 0$ on a $h^{(0,j)}_{\alpha \to \beta} \xrightarrow{j \to \infty} 0 \; \forall \alpha, \beta$.

$f^{(k)}_r = P(X'_k = X^2_k = r \text{ et } \forall k \leq i \; X'_i \neq X^2_i)$. On peut écrire $\sum_{k=1}^{j} \sum_r f^{(k)}_r h^{(k,j)}_{r\beta} = h^{(0,j)}_{1 \times \beta} = h^{(0,j)}_{2 \times \beta}$

et $(h^{(0,j)}_{1\beta} - h^{(0,j)}_{2\beta}) \xrightarrow{j \to \infty} 0 \; \forall \beta$

motif : arrangements des valeurs non nulles dans une matrice

Lemme 4 : Une CM est ergodique si
(i) chaque matrice de transition contient le m̂ motif régulier
(ii) les élts de ce motif sont pour chaque matrice $\geq \delta > 0$.

Dém : P régulière si $\exists c \in \mathbb{N}$ P^c brouillante. $H_{i,c} = \prod_{j=i+1}^{i+c} P_j$ brouillante $\forall i$.
et $\{H_{ic}\} > \delta^c$ + Th 3.

Théorème 5 : Une CM est ergodique si chaque matrice de transition contient un motif qui satisfait les 3 cond suivantes :
(i) ts les motifs commutent
(ii) $\exists a \in \mathbb{N}$ tq les matrices régulières ont lieu à intervalle au + a
(iii) ts les élts des motifs sont $> \delta$.

Cor : Une CM est ergodique si
(i) ttes les matrices ont un motif qui commute
(ii) ts les élts du motif $> \delta$.