Codage Source Canal

Exercice 1 **Taux-distorsion pour un source symétrique n-aire**

On considère une source et une destination avec des alphabets identiques $A_U = A_V = \{0, 1, ..., n-1\}$. On suppose que les statistiques de la sources sont uniformes $P(U = u) = 1/n$ pour $u = 0, 1, ..., n-1$. La fonction de distorsion est la distorsion de Hamming :

$$d(u, v) = 0 \text{ si } u = v$$

$$d(u, v) = 1 \text{ si } u \neq v$$

Dans cet exercice, on cherche à calculer la fonction taux-distorsion :

$$R(\delta) = \inf_{p(v|u)} \{I(U, V) \ ; \ \mathbf{E}(d) \leq \delta\}$$

1. Cette mesure de distorsion est souvent appelée "distorsion de la probabilité d'erreur" (*error probability distortion*). Justifier ce nom.
2. Déterminer δ_{min} et δ_{max}.
3. Montrer que $R(\delta) = \log n - \delta \log(n-1) - H(\delta)$ pour $\delta_{min} \leq \delta \leq \delta_{max}$ et $R(\delta) = 0$ sinon.

Exercice 2 **Source Gaussienne**

La source Gaussienne a pour alphabet-source $A_U = \mathbb{R}$, et les symboles produits $U_1, U_2, ...$ sont des variables aléatoires i.i.d de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. La mesure de distorsion considérée ici est $d(x, y) = (x-y)^2$. On définit la fonction taux-distorsion pour $\delta \geq 0$:

$$R(\delta) = \inf\{I(U, V) \ ; \ V \text{ v.a. réelle à densité telle que } \mathbf{E}[d(U, V)] \leq \delta\}$$

Montrer que $R(\delta) = 0$ si $\delta \geq \sigma^2$ et que $R(\delta) = \frac{1}{2} \log \frac{\sigma^2}{\delta}$ sinon.

Exercice 3 **Empilement compact de sphères**

1. On cherche à proposer une interprétation géométrique du codage pour un canal Gaussien $Y_i = X_i + Z_i$ avec $Z_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et une contrainte d'énergie $E(X^2) \leq \beta$. Pour chaque mot-code de taille n envoyé, le mot-code reçu est contenu dans une boule de rayon $\sqrt{n\sigma^2}$. Les mots-codes reçus ont une énergie inférieure à $n(\beta + \sigma^2)$, ils sont donc dans une boule de décodage de rayon $\sqrt{n(\beta + \sigma^2)}$. Combien de mots-codes peut-on "placer" sans intersection dans la boule de décodage ? Préciser le lien avec la formule de la capacité-coût pour un canal Gaussien.
2. Proposer une interprétation similaire pour le codage de source avec distortion quadratique, avec une source Gaussienne de variance σ^2.

Exercice 4 **Codage naïf**

On considère un canal binaire symétrique avec une probabilité d'erreur $p < 1/2$.

1. On suppose que le taux est $R = 1/3$, c'est-à-dire que le canal peut transmettre trois fois plus vite que l'émission de la source : on peut donc encoder avant de transmettre en répétant chaque bit trois fois. Par exemple, si la source veut transmettre 10100, le flux encodé sera 111000111000000, puis après transmission dans le canal il deviendra par exemple 101011111001100. Quelle est la meilleure stratégie de décodage ? Quelle est la probabilité d'erreur par bit transmis ?
2. On suppose $R = 1/(2n+1)$ et on considère le même schéma d'encodage-décodage. Calculer la probabilité d'erreur par bit transmis en fonction de p et n. Montrer que cette probabilité tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.