Canal avec Mémoire

Exercice 1 **Canal avec mémoire**

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice stochastique $r \times r$. Soit $\mathbf{p}$ le vecteur de probabilité stable par A : $p_j = \sum_i p_i a_{i,j}$. Soit $Z_1, Z_2, \dots$ la chaîne de Markov associée à A avec Z_1 loi de $\mathbf{p}$. L'entropie de la chaîne est définie par

$$H = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(Z_1, \dots, Z_n).$$

On considère le canal avec alphabets $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, \dots, r-1\}$ donné par

$$Y_i = X_i + Z_i \mod r$$

et on définit alors $C^n_{\max} := \max\{I(\mathbf{X}; \mathbf{Y})\}$ où $\mathbf{X}$ est une source-test de dimension n et

$$C_{\max} := \sup_n \frac{C^n_{\max}}{n}$$

Montrer que la capacité du canal vaut

$$C_{\max} = \log r - H.$$

Exercice 2 **Mesure de Gibbs**

L'évolution d'un système isolé est régie par les deux grandes lois de la physique : son énergie est conservée, et son entropie augmente. Comme nous allons le voir, cela détermine entièrement la distribution des états du système à l'équilibre.

Cas discret Soit $\mathcal{X}$ un ensemble fini d'états et $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ l'ensemble des mesures de probabilité sur $\mathcal{X}$. À chaque état $x \in \mathcal{X}$ est associée une certaine énergie $\mathcal{E}(x) \in \mathbb{R}$. Étant donnée une distribution d'états $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$, on peut définir

1. son énergie : $E(\mu) = \sum_{x\in\mathcal{X}} \mu(x)\mathcal{E}(x)$;
2. son entropie : $H(\mu) = \sum_{x\in\mathcal{X}} \mu(x) \ln \frac{1}{\mu(x)}$.

Le but du jeu est de déterminer les distributions $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ dont l'entropie est maximale parmi toutes celles qui ont une énergie $E(\mu) = e$ donnée.

1. Peut-on obtenir n'importe quelle énergie moyenne $e \in \mathbb{R}$? Déterminer l'ensemble $J = \{\mathcal{E}(\mu); \mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})\}$ des valeurs possibles.

2. Quelle est la réponse au problème posé dans les deux cas extrêmes suivants :

$$e = \min_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{E}(x) \qquad \text{et} \qquad e = \max_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{E}(x).$$

Pour traiter le cas général, on introduit la fonction suivante, appelée fonction de partition en physique, et transformée de Laplace en mathématiques :

$$Z \colon \beta \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{x\in\mathcal{X}} e^{-\beta\mathcal{E}(x)}.$$

3. Montrer que la fonction $\Lambda = \ln Z$ est convexe. Quel est l'ensemble $\Lambda'(\mathbb{R})$ des valeurs prises par sa dérivée ?

4. Établir que pour tout $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ et tout $\beta \in \mathbb{R}$,

$$H(\mu) - \beta E(\mu) \le \Lambda(\beta).$$

À quelle condition y a-t-il égalité ?

Pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, on appelle mesure de Gibbs sous la température β la distribution $\mu_\beta^* \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ définie pour tout $x \in \mathcal{X}$ par :

$$\mu_\beta^*(x) = \frac{1}{Z(\beta)} e^{-\beta \mathcal{E}(x)}.$$

5. Expliciter son entropie $H(\mu_\beta^*)$ et son énergie moyenne $E(\mu_\beta^*)$, en fonction de la température β.

6. Résoudre finalement le problème posé, pour toute énergie moyenne $e \in J$.

Cas continu L'espace d'états est à présent $\mathbb{R}$ tout entier. On considère une fonction mesurable $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}$, appelée énergie. Si f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$, son entropie $H(f)$ et son énergie moyenne $E(f)$ sont définies de la façon suivante (lorsque cela a du sens) :

$$H(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \ln \frac{1}{f(x)} dx \qquad \text{et} \qquad E(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathcal{E}(x) dx.$$

Le but du jeu est de déterminer les densités de probabilités f dont l'entropie est maximale parmi toutes celles qui ont une énergie moyenne $e \in \mathbb{R}$ donnée.

7. En s'inspirant du cas discret, résoudre le problème posé.

8. On pose $\mathcal{E}(x) = x\mathbf{1}_{\{\mathbf{x>0}\}}$. Expliciter l'ensemble des énergies possibles J, puis la densité dont l'entropie est maximale pour une énergie moyenne $e \in J$ donnée. En déduire une caractérisation importante des lois exponentielles $\mathrm{Exp}(\mu)$, $\mu > 0$.

9. Même question pour $\mathcal{E}(x) = x^2$. Quelle résultat remarquable retrouve-t-on ?