Canaux discrets sans mémoire

Exercice 1 **Canal binaire**

Calculer puis comparer les capacités des deux canaux suivants :

1. $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1\}$ et $P_{Y|X} = \begin{pmatrix} 1-\epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 1-\epsilon \end{pmatrix}$
2. $\mathcal{X} = \{0, 1\}$, $\mathcal{Y} = \{0, ?, 1\}$ et $P_{Y|X} = \begin{pmatrix} 1-2\epsilon & 2\epsilon & 0 \\ 0 & 2\epsilon & 1-2\epsilon \end{pmatrix}$

Quelle est la capacité du canal obtenu en les mettant en série ?

Exercice 2 **Canal n-aire symétrique avec coût**

On considère un canal n-aire dont la matrice de transition est :

$$P_{Y|X} = \begin{pmatrix} q & p & \dots & p \\ p & q & \dots & p \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ p & p & \dots & q \end{pmatrix}$$

Etant donnée une fonction de coût b positive, déterminer la fonction capacité-coût du canal :

$$C(\beta) = max\{I(X;Y) \mid E[b(X)] \leq \beta\}$$

Exercice 3 **Canal de Zorro**

Le canal de Zorro est le canal binaire de matrice de transition :

$$P_{Y|X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \epsilon & 1-\epsilon \end{pmatrix}$$

Calculer sa capacité.

Exercice 4 **Canal gaussien**

Le canal gaussien a pour alphabet d'entrée $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ et pour alphabet de sortie $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$. La réponse Y_i à une entrée X_i est donnée par :

$$Y_i = X_i + Z_i$$

avec les Z_i qui sont des variables i.i.d. de loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. On considère ici que le coût de transmission $b(x)$ d'un symbole $x \in \mathbb{R}$ dans un tel canal est simplement son énergie x^2.

Comme dans le cas discret, on définit la fonction capacité-coût d'un canal par :

$$C(\beta) = \max\{I(X;Y) \mid : X \text{ v.a. réelle à densité telle que } \mathbb{E}b(X) \leq \beta\}$$

La capacité $C(\beta)$ représente le nombre maximum de bits d'information non-erronée qu'il est possible de transmettre en moyenne à chaque utilisation du canal avec une puissance moyenne de transmission limitée à β. Montrer que :

$$C(\beta) = \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{\beta}{\sigma^2}\right)$$

Exercice 5 **Canaux gaussiens en parallèle**

On considère k canaux gaussiens en parallèle avec une contrainte globale de puissance β. Pour chaque canal $j = 1, ..., k$,

$$Y_i^{(j)} = X_i^{(j)} + Z_i^{(j)}$$

avec $Z_i^{(j)} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_j^2)$ des v.a. indépendantes. On suppose une contrainte globale :

$$\mathbb{E} \sum_{j=1}^{K} X_j^2 \leq \beta$$

La capacité du canal est alors définie par :

$$C(\beta) = \max_{p(x_1,...,x_k) \ | \ \mathbb{E} \sum X_j^2 \leq \beta} I(X^{(1)}, ..., X^{(k)};\ Y^{(1)}, ..., Y^{(k)})$$

1. Montrer que $I(X^{(1)}, ..., X^{(k)};\ Y^{(1)}, ..., Y^{(k)})$ est maximale pour

$$(X^{(1)}, ..., X^{(k)}) \sim \mathcal{N}\left(0, diag(\gamma_1^2, ..., \gamma_k^2)\right)$$

avec $\sum_i \gamma_i^2 = \beta$ et donner l'expression du maximum en fonction des σ_i^2 et des γ_j^2.

2. Comment peut-on répartir la puissance totale entre les différents canaux, *i.e.* comment trouver les γ_i^2, pour maximiser la capacité totale, ?