Entropie et jeu, distance de Kullback-Leibler

Exercice 1 **Le paradoxe de St Petersbourg**

On considère le jeu suivant : le joueur paye un droit d'entrée de c euros, et reçoit 2^k euros avec probabilité 2^{-k}, pour tous $k \geq 1$.

1. Quel est le gain moyen du joueur ?

On pourrait donc penser que quelque soit c, c est un juste prix... On suppose maintenant que le joueur peut jouer une fraction de c : s'il paye $c/2$, alors il reçoit la récompense $X/2$ où $\mathbf{P}(X = 2^k) = 2^{-k}$. Supposons que $X_1, X_2, \ldots,$ sont i.i.d. distribuées comme X et sont les gains successifs lorsque c est payé. On suppose que le joueur réinvestit toute sa fortune à chaque fois. Au début sa fortune est 1. Après un tour, sa fortune est donc X_1/c.

2. Donne une expression de la fortune S_n du jour après n tours. Montrer que S_n tend vers 0 ou $+\infty$ selon que $c < c^*$ ou $c > c^*$. Quelle est la valeur de c^* ? (on admet la loi forte des grands nombres)

On appelle c^* le juste prix d'entrée.

On admet que le joueur peut garder une partie de sa fortune. On suppose qu'à chaque tour il garde une proportion $\bar{b} = 1 - b$ de sa fortune.

3. Donner une nouvelle expression pour la fortune du joueur après n tours. On note toujours S_n cette quantité.

4. Pour quelles valeurs de c le joueur choisit-il de miser toute sa fortune ?

Exercice 2 **Distance de Kullback-Leibler**

Soit $\mathcal{X}$ un ensemble fini, $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ l'ensemble des mesures de probabilité sur $\mathcal{X}$.

Distances usuelles sur $\mathcal{P}(\mathcal{X})$

Il y a plusieurs manières naturelles de définir une distance sur $\mathcal{P}(\mathcal{X})$. Une première idée consiste à regarder $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ comme un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{|\mathcal{X}|}$, et le faire ainsi hériter d'une des normes usuelles d'espace vectoriel (elles sont toutes équivalentes). Par exemple,

$$||\mu - \nu||_1 = \sum_{x \in \mathcal{X}} |\mu(x) - \nu(x)|.$$

On peut aussi voir les éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ comme des fonctions de l'ensemble des parties de $\mathcal{X}$ dans $[0, 1]$, que l'on peut alors munir de la norme sup. C'est la distance en variation totale :

$$||\mu - \nu||_{\text{VT}} = \sup_{A \subseteq \mathcal{X}} |\mu(A) - \nu(A)|.$$

1. Vérifier que pour tout $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$, l'on a :

$$||\mu - \nu||_{\text{VT}} = \frac{1}{2}||\mu - \nu||_1.$$

2. Si μ' et ν' désignent les lois images de μ et ν par une fonction arbitraire $f \colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$, comment se comparent $||\mu' - \nu'||_{\text{VT}}$ et $||\mu - \nu||_{\text{VT}}$? Quand y a-t'il égalité ?

Divergence de Kullback-Leibler

Dans la suite, on admet l'inégalité *log-sum* : $\forall (a_i)_{i=1}^n,\ (b_i)_{i=1}^n \geq 0$,

$$\sum_{i=1}^n a_i \log \frac{a_i}{b_i} \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \log \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n b_i}.$$

En théorie de l'information comme en grandes déviations, il est en fait plus pertinent de mesurer la distance entre μ et ν par la quantité

$$D(\mu\|\nu) = \sum_{x\in\mathcal{X}} \mu(x)\log\frac{\mu(x)}{\nu(x)}.$$

C'est la *divergence de Kullback-Leibler* de μ par rapport ν.

3. Montrer que $D(\mu\|\nu) \geq 0$. Cas d'égalité ? Est-ce une distance ?

4. Si μ' et ν' désignent les lois images de μ et ν par une fonction arbitraire $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$, comment se comparent $D(\mu'||\nu')$ et $D(\mu||\nu)$? Quand y a-t'il égalité ?

5. Établir l'inégalité de Pinsker, valable pour tout $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$:

$$D(\mu\|\nu) \geq 2||\mu-\nu||^2_{\mathrm{TV}}.$$

(On montrera d'abord l'inégalité por des variables Bernoulli.)

Applications en théorie de l'information

6. Exprimer l'information mutuelle $I(X,Y)$ de deux variables aléatoires discrètes X et Y comme une divergence de Kullback-Leibler.

Les codages étudiés jusqu'ici requièrent la connaissance exacte de la loi μ de la source, ce qui est irréalisable en pratique : on ne dispose que d'une certaine estimation à priori, notée ν.

7. Calculer la perte de performance induite dans le cas où ν est dyadique, puis en donner un encadrement dans le cas où ν est quelconque.

Second principe thermodynamique

Soient $(X_n)_{n\geq 0}$ et $(Y_n)_{n\geq 0}$ deux chaînes de Markov de même matrice de transition sur $\mathcal{X}$.

8. Montrer que $D(\mathcal{L}(X_n)||\mathcal{L}(Y_n))$ décroît avec n. Qu'en déduire lorsque la chaîne admet la loi uniforme comme mesure stationnaire ?