

Structures et algorithmes aléatoires

TD8

27 novembre 2015

Exercice 1 Indépendance du passé et du futur

Soit $\{X_n\}_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov sur l'espace d'états S . Soient $j, \dots, j_k, i_0, \dots, i_{n-1} \in S$, on pose $A = \{X_{n+1} = j_1, \dots, X_{n+k} = j_k\}$ et $B = \{X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}\}$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(A \mid X_n = i, B) = \mathbb{P}(A \mid X_n = i)$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(A \cap B \mid X_n = i) = \mathbb{P}(A \mid X_n = i)\mathbb{P}(B \mid X_n = i)$.

Exercice 2 Equations d'équilibre global

Soit $\{X_n\}_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov sur l'espace d'états S avec la matrice de transition P .

1. Montrer que les équations d'équilibre global peuvent être exprimées de manière suivante : pour tout $I \subset S$,

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \notin I} \pi(i) P_{i,j} = \sum_{j \notin I} \sum_{i \in I} \pi(j) P_{j,i}.$$

2. Interpréter ces équations.

Exercice 3 File d'attente

On considère une file d'attente : des clients arrivent et font la queue devant un guichet. Le guichet sert un client à la fois. On note X_n le nombre de clients dans le file (y compris celui qui est en train d'être servi) juste avant le départ du n -ième client et A_{n+1} le nombre de clients arrivant dans la file entre les instants du $n+1$ -ième début de service (non compris) et du $n+1$ -ième départ (compris). On suppose aussi que A_{n+1} est indépendant de X_n et que (A_n) est une suite de v.a. indépendantes et identiquement distribuées.

On a donc la relation

$$X_{n+1} = \max(X_n - 1, 0) + A_{n+1}.$$

1. Montrer que X_n est une chaîne de Markov homogène.
2. Cette chaîne est-elle irréductible ? À quelles conditions l'est-elle ? Quelle est sa période ?

On note Φ_a la série génératrice de A_n , Φ_n celle de X_n et aussi $\pi_n(0) = P(X_n = 0)$.

3. Donner une relation entre Φ_n et Φ_{n+1} .

On veut maintenant trouver des conditions pour que la file soit dans un état *stationnaire*, c'est-à-dire que $\forall n, \Phi_n = \Phi_{n+1}$.

4. Montrer qu'alors, on doit avoir $E[A_n] \leq 1$ et que si $E[A_n] = 1$, alors $P(A_n = 1) = 1$ et $\forall n \geq 1, X_n = X_0$.

Exercice 4 Processus de naissance et de mort

Soient (r_i) , (p_i) et (q_i) des suites telles que $\forall i \geq 0, r_i \geq 0, p_i > 0$ et $q_i > 0, q_i + p_i + r_i = 1$ (si $i = 0$, alors $p_0 + r_0 = 1$). On considère une chaîne de Markov de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & & & \\ q_1 & r_1 & p_1 & & \\ & q_2 & r_2 & p_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

1. Donner une représentation graphique de cette chaîne de Markov.
2. Calculer la distribution stationnaire de cette chaîne de Markov, si elle existe. Sous quelles conditions existe-t-elle ? Est-elle unique ?

Exercice 5 Chaîne de Markov réversible

Soit $\{X_n\}_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov sur l'espace d'états S et avec la matrice de transition P .

1. Montrer que si $\{X_n\}_{n \geq 0}$ est réversible, alors son graphe de transition est symétrique (au sens suivant : $\forall i, j \in S, P_{i,j} > 0$ ssi $P_{j,i} > 0$).

Si le graphe de transition de $\{X_n\}_{n \geq 0}$ est symétrique, on peut définir un nouveau graphe non-orienté $G = (S, E)$ avec $\{i, j\} \in E$ ssi $P_{i,j} > 0$.

2. Montrer que si G est un arbre, alors $\{X_n\}_{n \geq 0}$ est réversible.

On va maintenant restreindre l'espace d'états à $S' \subset S$: toute transition sortante de S' est transformée en une boucle. La nouvelle matrice de transition est :

$$P'_{i,j} = \begin{cases} P_{i,j}, & j \neq i \\ P_{i,i} + \sum_{k \notin S'} P_{i,k}, & j = i \end{cases}$$

3. Montrer que si P est réversible, alors P' est également réversible.
4. Quel est le lien entre leurs distributions stationnaires ?

Exercice 6 Marche aléatoire

Soit $G = (V, E)$ un graphe fini non-orienté. À chaque arête $e \in E$, on associe un poids $w(e) > 0$. Pour tout sommet $u \in V$, $V(u)$ est l'ensemble des voisins de u et on pose $w(u) = \sum_{v \in V(u)} w(u, v)$.

Une marche aléatoire pondérée sur G est une chaîne de Markov de matrice de transition P telle que $P_{u,v} = \frac{w(u,v)}{w(u)}$ si $\{u, v\} \in E$ et $P_{u,v} = 0$ sinon.

1. Montrer qu'une marche aléatoire pondérée est réversible. Quelle est sa probabilité stationnaire ?
2. Montrer qu'une chaîne de Markov réversible est une marche aléatoire pondérée.

Exercice 7 Les cailloux

Des cailloux S_1, \dots, S_M sont alignés. À la date n , un caillou est pris au hasard et ce caillou échange sa place avec le caillou placé juste avant lui. Si le caillou sélectionné est en tête, on ne change rien. Par exemple, avec $M = 5$, si la configuration juste avant la date n est $S_2 S_3 S_5 S_1 S_4$ (S_2 est en tête) et si S_5 est tiré au sort, la configuration devient $S_2 S_5 S_3 S_1 S_4$, tandis que si S_2 est sélectionné, la configuration reste la même. À chaque instant n , S_i est sélectionné avec probabilité $\alpha_i > 0$, indépendamment de la configuration actuelle. Notons X_n la configuration à la date n .

1. Montrer que $\{X_n\}_n$ est une chaîne de Markov homogène, irréductible et apériodique.
2. Montrer que sa distribution stationnaire est

$$\pi(S_{i_1} \cdots S_{i_M}) = C \alpha_{i_1}^M \alpha_{i_2}^{M-1} \cdots \alpha_{i_M}.$$