

Structures et algorithmes aléatoires

TD8

21 novembre 2014

Exercice 1 Indépendance du passé et du futur

Soit $\{X_n\}_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov sur l'espace d'états Q . Soient $j, \dots, j_k, i_0, \dots, i_{n-1} \in Q$, on pose $A = \{X_{n+1} = j_1, \dots, X_{n+k} = j_k\}$ et $B = \{X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}\}$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(A \mid X_n = i, B) = \mathbb{P}(A \mid X_n = i)$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(A \cap B \mid X_n = i) = \mathbb{P}(A \mid X_n = i)\mathbb{P}(B \mid X_n = i)$.

Exercice 2

Soient (r_i) , (p_i) et (q_i) des suites telles que $\forall i \geq 0, r_i \geq 0, p_i > 0$ et $q_i > 0, q_i + p_i + r_i = 1$ (si $i = 0$, alors $p_0 + r_0 = 1$). On considère une chaîne de Markov de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & & & \\ q_1 & r_1 & p_1 & & \\ & q_2 & r_2 & p_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

1. Donner une représentation graphique de cette chaîne de Markov.
2. Calculer la distribution stationnaire de cette chaîne de Markov, si elle existe. Sous quelles conditions existe-t-elle? Est-elle unique?

Exercice 3 File d'attente

On considère une file d'attente : des clients arrivent et font la queue devant un guichet. Le guichet sert un client à la fois. On note X_n le nombre de clients dans le file (y compris celui qui est en train d'être servi) juste avant le départ du n -ième client et A_{n+1} le nombre de clients arrivant dans la file entre les instants du $n + 1$ -ième début de service (non compris) et du $n + 1$ -ième départ (compris). On suppose aussi que A_{n+1} est indépendant de X_n et que (A_n) est une suite de v.a. indépendantes et identiquement distribuées.

On a donc la relation

$$X_{n+1} = \max(X_n - 1, 0) + A_{n+1}.$$

1. Montrer que X_n est une chaîne de Markov homogène.
2. Cette chaîne est-elle irréductible? À quelles conditions l'est-elle? Quelle est sa période?

On note Φ_a la série génératrice de A_n , Φ_n celle de X_n et aussi $\pi_n(0) = P(X_n = 0)$.

3. Donner une relation entre Φ_n et Φ_{n+1} .

On veut maintenant trouver des conditions pour que la file soit dans un état *stationnaire*, c'est-à-dire que $\forall n, \Phi_n = \Phi_{n+1}$.

4. Montrer qu'alors, on doit avoir $E[A] \leq 1$ et que si $E[A] = 1$, alors $P(A_n = 1) = 1$ et $\forall n \geq 1, X_n = X_1$.

Exercice 4 Méthode un pas en avant

Soit $\{X_n, n \geq 0\}$ une chaîne de Markov homogène de matrice de transition P . Soit F un sous-ensemble de l'espace des états \mathcal{E} . On pose

$$\tau_F = \inf\{n \geq 0, X_n \in F\} \text{ (+}\infty \text{ si } \{X_n\} \text{ n'atteint jamais } F\text{)}.$$

Soient $p(i) = \mathbb{P}(\tau_F < \infty \mid X_0 = i)$ et $m(i) = \mathbb{E}(\tau_F \mid X_0 = i)$, $\forall i \in \mathcal{E}$ la probabilité et le temps moyen d'atteinte de F à partir de l'état i .

1. Montrer que

$$p(i) = \begin{cases} \sum_{j \in \mathcal{E}} p_{ij} p(j) & \text{si } i \notin F \\ 1 & \text{si } i \in F \end{cases}$$

et que

$$m(i) = \begin{cases} 1 + \sum_{j \in \mathcal{E}} p_{ij} m(j) & \text{si } i \notin F \\ 0 & \text{si } i \in F. \end{cases}$$

Une particule A bouge sur les quatre sommets d'un carré. À chaque instant, elle passe à une position adjacente avec probabilité $\frac{1}{3}$ (pour chaque position) et reste dans la même position avec une probabilité $\frac{1}{3}$, indépendamment des positions précédemment occupées. On place sur le même carré une autre particule B dont les mouvements sont de même nature que ceux de A , et les mouvements des deux particules sont indépendants.

2. Quel est le temps moyen pour que les particules se rencontrent, sachant qu'à l'instant initial elles sont adjacentes ?

Exercice 5 Ruine du joueur

Un joueur A , doté d'un capital initial de i euros, $0 < i < K$, joue contre un joueur B , qui a un capital initial de $K - i$ euros. À chaque étape du jeu, A gagne 1 euro avec probabilité p et en perd 1 avec probabilité $q = 1 - p$. La somme des capitaux reste constante égale à K et le jeu s'arrête quand un des deux joueurs est ruiné.

1. Calculer la probabilité de la ruine du joueur A (les étapes du jeu sont indépendantes) en fonction du capital initial du joueur A .
2. Calculer le temps moyen d'une partie en fonction du capital initial du joueur A .