Graphes aléatoires

Exercice 1 — Convergence vers la loi de Poisson

On pose π une distribution sur $\{-1, 0, 1, \ldots\}$ telle que

$$\pi(k) = \begin{cases} e^{-p} - (1-p) & \text{si } k = -1 \\ 1 - p & \text{si } k = 0 \\ e^{-p}\frac{p^k}{k!} & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer comment construire des variables aléatoires $X \sim B(p)$ et $Y \sim \mathcal{P}(p)$ telles que $P(X \neq Y) \leq p^2$.

2. En déduire une construction de variables aléatoires $X \sim \text{Bin}(n,p)$ et $Y \sim \mathcal{P}(np)$ telles que $P(X \neq Y) \leq np^2$.

Soient pour tous $k \in \mathbb{N}$, $f(k) = P(\text{Bin}(n,p) = k)$ et $g(k) = P(\mathcal{P}(np) = k)$.

3. Montrer que $\sum_{k\in\mathbb{N}} |f(k) - g(k)| \leq 2np^2$.

4. En déduire que pour tous $X \sim \text{Bin}(n,p)$, $Y \sim \mathcal{P}(np)$ et $A \subseteq \mathbb{N}$,

$$|P(X \in A) - P(Y \in A)| \leq 2np^2.$$

Exercice 2 — Introduction aux espérances conditionnelles

On a déjà défini l'espérance conditionnelle par rapport à *un évènement* :

$$\mathbb{E}[X = x | Y = y] = \sum_y xP(X = x|Y = y).$$

On défini désormais l'espérance conditionnelle par rapport à *une variable aléatoire*. Il s'agit de la *variable aléatoire*

$$\mathbb{E}[X|Y] : \omega \mapsto \mathbb{E}[X|Y = Y(\omega)]$$

(rappel : $\{Y = Y(\omega)\} = \{\omega' : Y(\omega') = Y(\omega)\}$).

On lance un dé, dont on note X le résultat. De plus, on note $Y = \mathbf{1}_{X\geq 4}$. Calculer $\mathbb{E}[X|Y]$.

On peut montrer que l'espérance conditionnelle conserve les propriétés habituelles (linéarité, monotonie, etc.), mais aussi que $\mathbb{E}[Y|Y] = Y$, $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}[X]$ et, si X et Y sont indépendants, $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$.

Exercice 3 — Attachement préférentiel

L'attachement préférentiel est un processus de création de graphes aléatoires avec une distribution en puissance des degrés.

Une variable aléatoire X suit une loi en puissance de paramètre β si

$$P(X = i) = Ci^{-\beta},$$

où C est une constante de normalisation.

Construction par attachement préférentiel On démarre avec un graphe G_0 contenant l'unique sommet u_0.

À l'étape $t+1$, on rajoute un sommet u_{t+1}, et une arête non-orientée e_{t+1} reliant u_{t+1} et un sommet v de G_t choisi comme suit :
- Avec probabilité α, v est choisi uniformément au hasard ;
- Avec probabilité $1-\alpha$, $P(v=u) = \frac{d_t(u)}{2t}$, où $d_t(u)$ est le degré de u dans G_t.

1. Que dire du graphe ainsi obtenu ?

2. Comment modifier le modèle pour permettre l'apparition de cycles ?

Évolution du nombre de sommets ayant un degré donné Soit $\mathcal{F}_t$ la tribu contenant toute l'information des t premières étapes de la construction.

Soit $X_i(t)$ le nombre de sommets de degré i à l'instant t.

3. Calculer les probabilités $P(X_i(t+1) = X_i(t) + a \mid \mathcal{F}_t)$, $a \in \{-1, 0, 1\}$. (distinguer les cas où $i = 1$ et $i > 1$)

Soit $c_1 = \frac{2}{3+\alpha}$ et, pour $i > 1$, $c_{i+1} = \frac{1+\alpha+\frac{1-\alpha}{2}i}{\alpha+\frac{1-\alpha}{2}(i-1)} c_i$.

4. Montrer que $\frac{c_i}{c_{i+1}} = 1 - \frac{1}{i}\frac{3-\alpha}{1-\alpha} + O(\frac{1}{i^2})$.

On admet que l'on a alors $c_i \sim C i^{-\beta}$, où $\beta = \frac{3-\alpha}{1-\alpha}$.

Soit $\epsilon > 0$ et $\Delta_i(t) = \mathbb{E}[X_i(t)] - c_i t$.

5. Montrer que

$$\Delta_1(t+1) = \Delta_1(t) - c_1 + 1 - \alpha\frac{\mathbb{E}[X_1]}{t+1} - (1-\alpha)\frac{\mathbb{E}[X_1]}{2t},$$

puis que

$$\Delta_1(t+1) = \Delta_1(t)(1 - \frac{\alpha}{t+1} - \frac{1-\alpha}{2t}) + O(t^{-1}).$$

6. Enfin, montrer que $\mathbb{E}[X_1(t)] - c_1 t = o(t^\epsilon)$.

7. En utilisant un argument similaire, montrer que

$$\Delta_i(t+1) = \Delta_i(t)\left(1 - \frac{\alpha}{t+1} - \frac{(1-\alpha)i}{2t}\right) + O(\Delta_{i-1}(t)/t) + O(t^{-1}).$$

8. Conclure que $\mathbb{E}[X_i(t)] - c_i t = o(t^\epsilon)$.

En pratique, il est même possible de montrer que : $\frac{X_i(t)}{t} \to c_i$ p.s.