Structures et algorithmes aléatoires
TD6

13 novembre 2015

Exercice 1 Marche aléatoire

Soit $\{X_i\}$, $i \geq 1$, une suite de variables aléatoires indépendantes et équidistribuées à valeur dans $\{-1, 1\}$ avec $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2$. On considère la marche aléatoire $\{N_n\}$ sur $\mathbb{Z}$ définie par $N_0 = 0$ et

$$N_{n+1} = N_n + X_{n+1},\ n \geq 0.$$

1. Montrer que pour tout $a > 0$ et tout $x > 0$,
$$\mathbb{P}(N_n \geq a) \leq e^{-ax}\mathbb{E}(e^{xN_n}) \ .$$
2. Utiliser le fait que $\cosh x \leq e^{x^2/2}$ pour en déduire que
$$\mathbb{P}(N_n \geq a) \leq e^{-a^2/2n} \ .$$
3. Poser $a_n = c(2n\ln(n))^{1/2}$ avec $c > 1$. Déduire du lemme de Borel-Cantelli que
$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} N_n((2n\ln(n))^{-1/2}) < c) = 1 \ .$$
En déduire que
$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} N_n((2n\ln(n))^{-1/2}) \leq 1) = 1 \ .$$

Exercice 2 Balles et urnes

On jète m balles uniformement et indépendamment dans n urnes.

1. Quelle est la probabilité que l'urne 1 ait exactement une balle étant donné que exactement une balle est dans les 4 premières urnes ?
2. Quelle est l'espérance conditionelle du nombre de balles dans l'urne 1 étant donné que l'urne 2 est vide ?
3. Donner une expression pour la probabilité que l'urne 1 contienne plus de balles que l'urne 2.
4. Quel est le nombre espéré $f(m)$ de balles qui sont seules dans leur urne ?

Exercice 3 Poissonnienne divisée

Soit X une variable de Poisson à espérance μ. Pour chaque $i \in \{1, 2, \ldots, X\}$ soit B_i une variable de Bernouilli à espérance p. Soit Y le nombre de B_i tel que $B_i = 1$ et Z le nombre de B_i tel que $B_i = 0$.

Montrer que Y et Z sont des variables de Poisson à espérance μp et $\mu(1-p)$ et qu'ils sont indépendants.

Exercice 4 Approximation vs. réalité

On jète n balles uniformement et indépendamment dans n urnes. Soit p_n la probabilité que chaque urne contient exactement 1 balle.

1. Donner une borne supérieure pour p_n en utilisant l'approximation poissonnienne.

2. Donner une expression exacte pour p_n.
3. Interpréter le quotient de p_n et sa borne supérieure en termes d'une probabilité.

Exercice 5 Bornes de Chernoff pour la loi de Poisson

noindent Soit X une v.a. distribuée selon une loi de Poisson de paramètre μ. Montrer que pour tout $x > \mu$,

$$P(X \geq x) \leq \frac{e^{-\mu}(e\mu)^x}{x^x}$$

et que pour tout $x < \mu$,

$$P(X \leq x) \leq \frac{e^{-\mu}(e\mu)^x}{x^x} \quad .$$

Exercice 6 Collectionneur de coupons

Soit X le nombre de boîtes ouvertes jusqu'à ce que le collectionneur ait obtenu tous les coupons. On veut montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(X > n\log n + cn\big) = 1 - e^{-e^{-c}}$$

pour tout $c > 0$.

Pour ça, on interprète l'événement $X > n\log n + cn$ comme une urne étant vide après le jet de $m = \lfloor n\log n + cn \rfloor$ balles dans n urnes. On denote par $\mathscr{E}$ l'événement qu'aucune urne n'est vide si le nombre de balles dans chaque urne est une variable poissonnienne à espérance $\log n + c$ et par Y le nombre total de balles.

1. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\mathscr{E}) = e^{-e^{-c}}$.
2. Montrer que $\mathbb{P}\big(|Y - m| > \sqrt{2m\log m}\big) \to 0$ quand $n \to \infty$.
3. Montrer que $\mathbb{P}\big(\mathscr{E} \mid |Y - m| \leq \sqrt{2m\log m}\big) - \mathbb{P}\big(\mathscr{E} \mid Y = m\big) \to 0$ quand $n \to \infty$.
4. En déduire que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\mathscr{E}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(\mathscr{E} \mid Y = m\big)$.
5. Conclure.